Wittgenstein und die Philosophie der Mathematik

Joachim Bromand, Bastian Reichardt (Hrsg.)

Wittgenstein
und die Philosophie
der Mathematik

mentis
MÜNSTER

Einbandabbildung: ■■

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.dnb.de abrufbar.

Gedruckt auf umweltfreundlichem, chlorfrei gebleichtem
und alterungsbeständigem Papier ♾ ISO 9706

Eisenbahnstraße 11, 48143 Münster, Germany
www.mentis.de

Printed in Germany
Einbandgestaltung: ■■
Wissenschaftlicher Satz: satz&sonders GmbH, Münster (www.satzundsonders.de)
Druck: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten
ISBN 978-3-95743-■■

INHALTSVERZEICHNIS

Joachim Bromand
Einleitung –
Wittgenstein und die Philosophie der Mathematik 7

TEIL I. Zur Einordnung Wittgensteins in der Philosophie der Mathematik 27

Hilary Putnam
Über Wittgensteins Philosophie der Mathematik (I) 29

James Conant
Über Wittgensteins Philosophie der Mathematik (II) 51

Bastian Reichardt
Mathematische Objektivität 77

Severin Schroeder
Konventionalismus und Empirismus in Wittgensteins
Philosophie der Mathematik 99

TEIL II. Cantor, Gödel, Turing 117

Felix Mühlhölzer
Wittgenstein und Überabzählbarkeit 119

Esther Ramharter
In der Luft verankert? –
Wittgenstein und Cantor zur Kardinalzahlarithmetik 151

Juliet Floyd
Wittgensteins Diagonalargument –
Eine Variation von Cantor und Turing 165

Graham Priest
Wittgensteins Bemerkungen zu Gödels Theorem 195

TEIL III. (Inkonsistente) Begriffsbildungen in Wittgensteins Philosophie der Mathematik 225

Hans-Johann Glock & Kai Michael Büttner
Mathematik und Begriffsbildung 227

Joachim Bromand
Wittgenstein über Paradoxien und Widersprüche 247

Über die Autoren 279

Verzeichnis von Wittgensteins Schriften, Vorlesungen und ihren Siglen 283

Graham Priest

WITTGENSTEINS BEMERKUNGEN ZU GÖDELS THEOREM*

1. Einführung

Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik haben vermutlich die zurückhaltendste Rezeption unter all seinen posthum veröffentlichten Arbeiten erfahren. Anderson beispielsweise schreibt: »[It is] hard to avoid the conclusion that Wittgenstein failed to understand clearly the problems with which workers in the foundations of mathematics have been concerned« (1964, S. 489); Kreisel kommentiert: »a surprisingly insignificant product of a sparkling mind« (1959, S. 158). Dummett zeigt sich deutlich verständnisvoller und erinnert uns klugerweise daran, dass es sich um Bemerkungen handelt, die von den Herausgebern aus Notizbüchern zusammengestellt wurden, die nie zur Veröffentlichung gedacht waren; selbst er fährt aber fort:

> [M]any of the thoughts are expressed in a manner which the author recognized as inaccurate or obscure; some passages contradict others; some are quite inconclusive; some raise objections to ideas which Wittgenstein held or had held which are not clearly stated in the volume. (1964, S. 491)

Insbesondere die Bemerkungen zu Gödels Theorem zogen sehr negative Kommentare nach sich. Kreisel bezeichnet Wittgensteins Argumente als »wild« (1959, S. 153); Anderson fügt hinzu: »[Wittgenstein's arguments] indicate that Wittgenstein misunderstood both the content of and the motivation for [...] Gödel's theorem« (1964, S. 485); und schließlich noch einmal Dummett: »other passages again, particularly those on consistency and Gödel's theorem, are of poor quality or contain definite errors« (ebd.).[1] Das Ziel die-

* Anm. d. Hrsg.: Bei diesem Text handelt es sich um die deutsche Übersetzung des Aufsatzes von Graham Priest: Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem. In: Kölbel, Max & Weiss, Bernhard (Hg.): *Wittgenstein's Lasting Significance*, Routledge: London & New York 2004, S. 206–225. Die vorliegende Übersetzung stammt von Joachim Bromand.

[1] Einige Kommentatoren in jüngerer Zeit, insbesondere Floyd, waren Wittgensteins Bemerkungen gegenüber wohlmeinender. Siehe die Diskussion und Verweise in Floyd (2001).

ses Aufsatzes ist es, den Fall nach etwa einem halben Jahrhundert noch einmal aufzurollen, um zu überprüfen, ob die harschen Kommentare berechtigt sind.

Wittgensteins Bemerkungen über Gödels (erstes Unvollständigkeits-) Theorem finden sich fast ausschließlich in einem Anhang von etwa zwanzig Bemerkungen zu Teil I der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Von den Herausgebern erfahren wir (BGM, S. 30), dass Teil I auf einem Typoskript basiert, das Wittgenstein einmal als zweiten Teil der *Philosophischen Untersuchungen* vorgesehen hatte, dass aber der Text im Anhang vom Hauptteil des Materials losgelöst wurde. Der Anhang ist in sich nicht abgeschlossen, da er auf andere Themen der *Bemerkungen* und auch auf die *Philosophischen Untersuchungen* anspielt, seine Isolation deutet aber daraufhin, dass er auch für sich genommen betrachtet werden kann. Wegen Wittgensteins Schreibstil zu dieser Zeit hat man stets ein hartes Stück Arbeit vor sich, um herauszufinden, was vor sich geht. Der fragliche Anhang stellt einen Extremfall dieses Problems dar. Selbst versierte Wittgenstein-Interpreten haben Probleme, die aphoristischen Bemerkungen zu dekodieren. Gelegentlich ist es schwer, den Sinn einzelner Paragraphen auszumachen; in noch stärkerem Maße gilt dies für die Zusammenhänge zwischen vielen Paragraphen. Manchmal streitet sich Wittgenstein mit seinem imaginären Gesprächspartner; manchmal scheint er mit sich selbst zu ringen. Wenn wir aber Wittgenstein in fairer Weise in der Angelegenheit Gehör schenken wollen, ist es entscheidend zu verstehen, welchen Standpunkt er genau vertritt. Daher beabsichtige ich, mit einer gründlichen Lektüre und Kommentierung der fraglichen Passage fortzufahren – was meines Wissens noch niemand bislang versucht hat. Dazu komme ich nun.

2. Annäherung an das Problem

Wittgensteins Überlegungen zu Gödels Theorem setzen in offenkundiger Distanz von der Sache an, nämlich mit der Beobachtung, dass nicht jeder im Indikativ ausgedrückte Satz propositionalen Gehalt besitzt.[2]

> 1. Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z. B., entsprechend unserem: »Ich möchte wissen, ob …« und »Ich wünsche, dass …«.
>
> Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draußen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, »ich wünsche

[2] Die Zitate stammen aus BGM, I, Anh. III, S. 116–123. Alle Kursivierungen finden sich im Original.

> zu wissen, ob …«, zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet wird? – (BGM, I, Anh. III, § 1, S. 116)

Er fährt dann fort:

> 2. Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze.
>
> Und – sagst du – diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Charakteristikum des Schachspiels, dass es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und dass der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach in gewissem Sinne sehr verwandtes Spiel geben, das darin besteht, dass man die Schachzüge macht, aber ohne dass es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.
>
> 3. Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag (›Annahme‹) und dem Befehlen des Vorgeschlagenen.
>
> 4. Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische *Sätze* auszusprechen, und ohne dass uns die Ähnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele?
>
> Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet? – Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn unser Hund z. B. sich nicht so benimmt, wie wir es wünschen.
>
> Wir sind gewohnt, zu sagen »2 mal 2 ist 4« und das Verbum »ist« macht dies zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandtschaft her mit allem, was wir ›Satz‹ nennen. Während es sich nur um eine sehr oberflächliche Beziehung handelt.

Diese Bemerkungen werfen eine Reihe verschiedener Fragen auf, die wir jedoch übergehen wollen. Wichtig im vorliegenden Kontext ist, dass klar ist, sobald wir zu Anmerkung 4 gelangen, dass Wittgenstein die Idee in Betracht zieht, dass arithmetische Gleichungen, auch wenn sie in Form von Sätzen im Indikativ auftreten mögen, ebenso wie Sätze wie »Ich möchte wissen, ob es regnet«, keinen propositionalen Gehalt besitzen. Hierbei handelt es sich um eine Wittgenstein'sche Thematik, die schon bis auf den *Tractatus* zurückreicht (vgl. z. B. TLP 4.46f., 6.2f.). Dort argumentiert Wittgenstein dafür, dass Sätze der Logik und Mathematik *unsinnig* sind bzw. keinen Informationsgehalt besitzen. Auch wenn Wittgenstein zu diesem Zeitpunkt die Positionen des *Tractatus* schon längst aufgegeben hat, spielt er immer noch mit dem Gedanken, dass Aussagen der Mathematik und Logik über keinen Gehalt verfügen.

Dies ist der Kontext, der zu Wittgensteins Nachsinnen über Gödels Theorem führt. Für den Fall, dass darüber auch nur der geringste Zweifel bestehen sollte, kehrt er in seiner letzten Bemerkung (20) explizit zu dieser Thematik zurück: »Man muss sich hier daran erinnern, dass die Sätze der Logik so konstruiert sind, dass sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien gar nicht *Sätze* [...]«.[3]

3. Die Problemstellung und eine erste Lösung

Vor diesem Hintergrund führt die nächste Bemerkung die Thematik von Gödels Theorem ein.

> 5. Gibt es wahre Sätze in Russells System, die nicht in seinem System zu beweisen sind? – Was nennt man denn einen wahren Satz in Russells System?

Wie es scheint, wird das Theorem – oder zumindest eine Art und Weise, in der es häufig paraphrasiert wird – als Einwand gegen die in Frage stehende Sicht auf die Mathematik vorgebracht. Ist diese Sichtweise richtig, müssen (zumindest einige) mathematische Aussagen propositionalen Gehalt – sogar wahren Gehalt – besitzen. Was aber, fragt Wittgenstein nun, soll Wahrheit in diesem Kontext bedeuten? Der folgende Paragraph beantwortet diese Frage.

> 6. Was heißt denn, ein Satz ›*ist wahr*‹? ›*p*‹ *ist wahr* = *p*. (Dies ist die Antwort.)
>
> Man will also etwa fragen: unter welchen Umständen behauptet man einen Satz? Oder: wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht? Und die ›Behauptung des Satzes‹ ist hier entgegengesetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung, – oder als *Teil* eines andern Satzes, u. dergl.
>
> Fragt man also in diesem Sinne: »Unter welchen Umständen behauptet man in Russells Spiel einen Satz?«, so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als ›Grundgesetz‹ (Pp.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russell'schen Symbolen nicht verwendet.

Wittgenstein beruft sich hier auf eine Redundanztheorie der Wahrheit. Die Behauptung, dass *p* wahr ist, besagt damit nicht mehr und nicht weniger als die Behauptung von *p* selbst. Diese Position ist von anderer Stelle in den späteren Schriften bekannt (siehe z. B. PU § 136). Es handelt sich hier klarerweise um ein eigenständiges Wahrheitsverständnis, das sich freilich vom modelltheoretischen Wahrheitsverständnis unterscheidet, das üblicherweise von modernen Logikern bei der Diskussion von Gödels Theorem herangezo-

[3] Man beachte, dass Wittgenstein unter ›Satz‹ manchmal ›indikativen Satz‹ versteht, manchmal ›indikativen Satz mit propositionalem Gehalt‹.

gen würde. Wir sollten nicht versuchen, diese Streitigkeit hier zu entscheiden, sondern nur darauf hinweisen.

Setzt man eine Redundanztheorie der Wahrheit voraus, wird die Frage relevant, unter welchen Bedingungen wir bereit sind, *p* zu behaupten. Wittgenstein nimmt offenbar nicht an, dass die Behauptung eines Satzes mit sich bringt, dass er einen propositionalen Gehalt besitzt. Er vergleicht das Behaupten stattdessen mit anderen Arten von Äußerungen, z. B. mit Sprachübungen. Dann tritt ein weiteres vertrautes Wittgenstein'sches Thema in Erscheinung. Das Behaupten ist relativ zu einem Sprachspiel. Das heißt, wenn wir Sätze gebrauchen, die in der Sprache der *Principia* ausgedrückt sind, dann gibt es Regeln, die festlegen, wann ein Satz behauptet werden kann und wann nicht. Wittgenstein meint insbesondere, dass ein solcher Satz behauptet werden kann, wenn er in der letzten Zeile eines Beweises der *Principia* (eventuell auch einem einzeiligen Beweis) erscheint. Mit anderen Worten: Ein wahrer Satz der *Principia* zu sein heißt so viel wie beweisbar im Axiomensystem der *Principia* zu sein. Was auch immer man von der Redundanztheorie der Wahrheit und von der Theorie der Sprachspiele halten mag, eröffnet diese Tatsache jemandem, der diesen Positionen nicht zustimmt, zumindest eine Möglichkeit, Wittgenstein in der eigenen Terminologie zu verstehen. Wenn er Wittgenstein von einer Wahrheit der *Principia* sprechen hört, kann er ihn einfach in dem Sinne von ›beweisbar im Axiomensystem der *Principia*‹ verstehen. Gödels Theorem gilt natürlich auch für andere Sprachen und andere Axiomensysteme. Zweifellos war sich Wittgenstein dieser Tatsache bewusst. Zweifellos wäre er auch davon ausgegangen, dass seine Bemerkungen ebenso auf jedes ähnliche System zutreffen. Er verwendet die *Principia* einfach als Beispiel. So werde ich es auch tun.

Es sollte erwähnt werden, dass Wittgenstein einräumt, dass die Sätze der *Principia* in einem einschlägigen Sinn wahr/falsch sind. Dieser Sinn besteht aber nur darin, von bestimmten Regeln erzeugt zu werden. Wie Wittgenstein verteidigen will, ist dies völlig vereinbar damit, dass sie keinen propositionalen Gehalt oder Informationsgehalt besitzen. Wie der Gesprächspartner aber schnell betont, scheint Wittgensteins Identifikation von Wahrheit und Beweisbarkeit Gödels Theorem zuwiderzulaufen.

> 7. »Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russells nicht beweisbar?« – ›Wahre Sätze‹, das sind also Sätze, die in einem *andern* System wahr sind, d. h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiss; warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze – der Physik, z. B. – in Russells Symbolen anschreiben? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind? – Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklids System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind. Können nicht Dreiecke –

> in einem andern System – ähnlich (*sehr* ähnlich) sein, die nicht gleiche Winkel haben? – »Aber das ist doch ein Witz! Sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander ›ähnlich‹!« – Freilich nicht; und ein Satz, der nicht in Russells System zu beweisen ist, ist in anderm Sinne ›wahr‹ oder ›falsch‹, als ein Satz der »Principia Mathematica«.

Bestärkt durch sein Verständnis von Wahrheit, greift Wittgenstein zur naheliegenden Erwiderung. Natürlich kann es Sätze in der Sprache der *Principia* geben, die im Axiomensystem der *Principia* nicht beweisbar sind, die aber in einem anderen Axiomensystem bewiesen werden können. Diese Erwiderung wäre jedem modernen Logiker genehm. Der unentscheidbare Gödelsatz ist nicht in der Theorie selbst beweisbar, kann aber in einer Metasprache/Metatheorie bewiesen (oder als wahr erwiesen) werden.

Wittgenstein weist zutreffenderweise darauf hin, dass dies z. B. dem Fall ähnelt, dass bestimmte Sätze in der Euklidischen Geometrie beweisbar sind, nicht aber in einer anderen Geometrie. Der Gesprächspartner fasst dies als Witz auf: Im geometrischen Fall wechseln die Bedeutungen. Wiederum erwidert Wittgenstein in zutreffender Weise: Die Bedeutung verändert sich in diesem Falle auch. In diesem Falle ist ›beweisbar‹ mehrdeutig; der unentscheidbare Satz ist nicht beweisbar im Axiomensystem der *Principia*, in einer Metatheorie aber beweisbar. Vielleicht ist damit aber noch nicht der zentrale beunruhigende Aspekt getroffen. Wittgenstein grübelt weiter nach:

> 8. Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: »Ich habe einen Satz (ich will ihn mit ›*P*‹ bezeichnen) in Russells Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, dass er sagt: ›*P* ist nicht in Russells System beweisbar‹. Muss ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, dass er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, dass er nicht beweisbar ist. So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein.«

Der zentrale Gedanke ist hier, dass der unentscheidbare Satz *P* so verstanden werden kann, dass er *sagt*, er sei nicht beweisbar in der *Principia*. Also gilt:

(I) *P* gdw. *P* ist nicht beweisbar in der *Principia*.[4]

Man beachte diese Äquivalenz. Sie besteht zwischen einem Satz der Sprache der *Principia* und einem Satz der Metasprache. Und da diese unterschiedlichen ›Sprachspielen‹ entstammen, ist es – aus Wittgensteins Perspektive – keineswegs offenkundig, dass die beiden in Frage stehenden Sätze dasselbe

[4] Streng genommen: ›*P*‹ ist nicht beweisbar. Wie Wittgenstein werde ich aber die Anführungszeichen weglassen, wo dies nicht zu Verwirrungen führen kann.

bedeuten. Ob die Äquivalenz glaubhaft ist – und natürlich, was genau ihre beiden Seiten bedeuten –, werden die zentralen Fragen der folgenden Diskussion sein. Mit Hilfe von (I) können wir wie folgt schließen:

(A) Wenn *P* falsch ist bzw. seine Negation wahr ist, ist *P* aufgrund der Redundanztheorie der Wahrheit beweisbar. Wegen der Korrektheit der *Principia* ist dies unmöglich; daher ist *P* wahr.

(B) Wenn *P* bewiesen ist, dann ist *P* wiederum aufgrund der Korrektheit der *Principia* wahr und daher nicht beweisbar; also ist *P* nicht beweisbar.

Wir haben Argumente sowohl für die Wahrheit als auch für die Unbeweisbarkeit von *P*. Dies stellt unmittelbar Wittgensteins Identifikation von Wahrheit mit Beweisbarkeit in Frage und weckt so die Befürchtung, dass der Satz über einen Gehalt verfügt, der in einem substanzielleren Sinne wahr ist – in dem Falle könnte Wittgenstein einzugestehen haben, dass der Satz doch über realen Gehalt verfügt; oder wir haben, was vielleicht schlimmer wäre, einen offenkundigen Widerspruch, wenn er wirklich an der Identifikation von Wahrheit und Beweisbarkeit festhalten will. Man beachte, dass diese Bemerkung die Korrektheit der *Principia* nicht erwähnt. Man beachte aber ebenfalls, dass durch die Identifikation von ›wahr in der *Principia*‹ und ›beweisbar in der *Principia*‹, wie Wittgenstein sie intendiert, sowohl die Korrektheit als auch ihre Umkehrung per definitionem wahr sind. Im Rahmen seiner Erwiderung insistiert Wittgenstein darauf, dass wir uns der Mehrdeutigkeit klar sein müssen, die er hinsichtlich des Begriffs des Beweises, d. h. der Wahrheit, diagnostiziert hat. Er fährt fort:

> So wie wir fragen: »in welchem System ›beweisbar‹?«, so müssen wir auch fragen: »in welchem System ›wahr‹?«. ›In Russells System wahr‹ heißt, wie gesagt: in Russells System bewiesen; und ›in Russells System falsch‹ heißt: das Gegenteil sei in Russells System bewiesen. – Was heißt nun dein: »angenommen, er sei falsch«? *In Russells Sinne* heißt es: ›angenommen das Gegenteil sei in Russells System bewiesen‹; *ist das deine Annahme*, so wirst du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesem deutschen Satz. – Nimmst du an, der Satz sei in Russells System beweisbar, so ist er damit *in Russells Sinne* wahr und die Deutung »P ist nicht beweisbar« ist wieder aufzugeben. Nimmst du an, der Satz sei in Russells Sinne wahr, so folgt das *Gleiche*. Ferner: soll der Satz in einem andern als Russells Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, dass er in Russells System bewiesen ist. (Was im Schach »verlieren« heißt, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.)

Angenommen, ›falsch‹ heißt, dass seine Negation beweisbar in der *Principia* ist. Dann zeigt die Überlegung (A), wenn man (I) annimmt, dass *P* wahr, d. h.

beweisbar in der *Principia* ist. In dem Falle sollten wir aber die Interpretation (I) aufgeben. Schließlich wäre die linke Seite wahr und die rechte Seite falsch. Ähnlich zeigt (B), wenn ›wahr‹/›beweisbar‹ so viel heißt wie ›beweisbar in der *Principia*‹, dass *P* nicht wahr/beweisbar ist. Wiederum liefert uns diese Tatsache einen Grund, (I) zurückzuweisen. Wenn demgegenüber ›falsch‹ etwas anderes bedeutet – dann widerstreitet die Tatsache, dass etwas falsch ist, nicht seiner Beweisbarkeit in der *Principia*. Die nächste Bemerkung fährt fort:

> 9. Was heißt es denn: *P* und »*P* ist unbeweisbar« seien der gleiche Satz? Es heißt, dass diese *zwei* deutschen Sätze in der und der Notation *einen* Ausdruck haben.

Die Bemerkung scheint es zu rechtfertigen, die Behauptung, dass *P* als ›*P* ist unbeweisbar‹ verstanden werden kann, einfach in dem Sinne zu erläutern, dass wir den letzteren Satz überall verwenden können, wo wir auch den ersteren verwenden, und umgekehrt. Hier liegt ein kleiner Fehler vor. Wittgenstein scheint vergessen zu haben, dass *P* kein Satz des Deutschen ist, sondern des *Principia*esischen. Aber das Ergebnis der Überlegung scheint hinreichend unkontrovers zu sein.

Jedenfalls ist die Stoßrichtung von Wittgensteins Gedanken in der Sache klar: Ein Widerspruch droht nur zu resultieren, wenn man sowohl einem bestimmten Begriff von Wahrheit/Beweisbarkeit beipflichtet als auch der Äquivalenz (I) für diesen Begriff. Aber es könnte sehr wohl legitim sein, dieser Äquivalenz für einen solchen Begriff zu widerstehen. Man beachte, dass der gegenwärtig vorherrschenden Meinung zufolge (I) oder einer vergleichbaren Aussage beizupflichten wäre. Geht man davon aus, dass das Beweisprädikat $\mathrm{B}(x, y)$ wirklich die Beweisbarkeit arithmetisch ausdrückt, ist *P* – d. h. $\neg\exists x\, \mathrm{B}(x, \mathbf{n})$, dessen Gödelnummer n ist, mit dem Numeral $\mathbf{n}$ – wahr *im Standardmodell* genau dann, wenn *P* nicht beweisbar ist. Wittgenstein geht jedoch von einem anderen Wahrheitsbegriff aus, so dass ihm dieses Argument für (I) nicht zur Verfügung steht.

4. Toleranz gegenüber Inkonsistenz

Nun aber fährt Wittgenstein in seinen Überlegungen fort:

> 10. »Aber *P* kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen, er sei nicht beweisbar.« Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte – vielleicht durch Irrtum – ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung »*unbeweisbar*« wieder zurückziehen?

Er wiederholt Argument (B) dahingehend, dass *P* nicht beweisbar ist, und stellt dann die entscheidende Frage. Angenommen, dass (B) einen Beweis bildet oder zumindest, dass ich glaube, dass es so ist, *warum* sollte ich nicht am Beweis *und* der Interpretation (I) festhalten?[5] In diesem Falle hätte ich *P* in der *Principia* bewiesen, aber ebenso bewiesen, dass es nicht beweisbar in der *Principia* ist. Wir haben einen Widerspruch. Aber was soll's?[6]

> 11. Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russells System) von *P*; so habe ich mit diesem Beweis *P* bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russells System wäre, – dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen. – Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet. – Aber hier ist ja ein Widerspruch! – Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?
>
> 12. Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: »Ich lüge. – Also lüge ich nicht. – Also lüge ich. – etc.«? Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, dass man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wieder ihn folgern kann? – der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun? – Es ist eine brotlose Kunst! – Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.
>
> 13. Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, dass er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

Es sind vielleicht diese Bemerkungen, die mehr als alle anderen den Zorn der Kommentatoren auf sich gezogen haben. Wittgenstein billigt die Möglichkeit, dass gezeigt wurde, dass *P* sowohl beweisbar als auch nicht beweisbar in der *Principia* ist – und sogar, dass dies in der *Principia* selbst gezeigt werden könnte; und er scheint zufrieden mit der Vorstellung zu sein. Damit ist sichergestellt, einen wunden Punkt bei den meisten zu treffen, nämlich die abergläubische Angst vor Widersprüchen, wie Wittgenstein es selbst in Bemerkung 17 ausdrückt. Wittgensteins offenkundige Bereitschaft, Widersprüche zu akzeptieren, ist kein Ausnahmefall. An anderen Stellen in den

---

[5] Es kann nicht geleugnet werden, dass der letzte Satz von 10. etwas merkwürdig formuliert ist. Im Kontext scheint nur die folgende Lesart Sinn zu ergeben: ›Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte – vielleicht durch Irrtum – ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und [warum sollte ich] sagen, ich müsse meine Deutung »unbeweisbar« wieder zurückziehen?‹

[6] Erwähnenswert ist, dass die moderne Standardreaktion darin bestünde, die Äquivalenz (I) zu billigen: *P* ist nicht beweisbar (in der *Principia*) gdw. *P* (wahr ist im Standardmodell der Arithmetik). Die Argumente (A) und (B) haben Bestand (modulo der Korrektheit der *Principia*): *P* ist sowohl wahr als auch unbeweisbar. Dies ist aber kein Widerspruch, da Wahrheit nicht Beweisbarkeit impliziert – die Arithmetik ist unvollständig. Da aber Wittgenstein letztlich Wahrheit mit Beweisbarkeit identifiziert, kann er diese Unterscheidung nicht treffen.

Bemerkungen und anderswo spielt Wittgenstein mit dem Widerspruch.[7] Er behauptet, dass Widersprüche der Art, wie wir sie hier vorfinden, unnütz sind, dass es sinnlos ist, sie zu folgern, dass sie aber harmlos sind, da sie keine Auswirkungen auf den Rest unserer Sprache haben. Hätte er auf der Doktrin beharrt, dass die Bedeutung der Gebrauch ist, hätte er fortfahren können zu behaupten, dass derartige Widersprüche bedeutungslos sind. Und tatsächlich sympathisiert er gelegentlich mit dieser Sichtweise.[8] Aber selbst in den *Philosophischen Untersuchungen* behauptet er niemals, dass Bedeutung einfach mit Gebrauch identifiziert werden kann (siehe z. B. § 43.).

Wittgenstein bemerkt ebenfalls die Ähnlichkeit zwischen dem in Frage stehenden Widerspruch und den Widersprüchen von der Sorte des Lügners. In der Tat kann die fragliche Paradoxie sehr wohl als ein selbstreferentielles Paradox derselben Art erachtet werden. Man betrachte den Satz A mit der Form ›$\langle A\rangle$ ist nicht beweisbar‹ – dieser Satz ist nicht beweisbar –, wobei die eckigen Klammern eine Methode der Namensbildung darstellen. Hier ist Beweisbarkeit im naiven Sinne von ›durch das ein oder andere Argument gezeigt‹ zu verstehen. Wenn A beweisbar ist, dann ist A wahr, da alles Beweisbare wahr ist; also ist $\langle A\rangle$ nicht beweisbar. Insgesamt ist also $\langle A\rangle$ nicht beweisbar. Wir haben aber gerade dies bewiesen; d. h. $\langle A\rangle$ ist beweisbar. Dies ist eine Version des *Knower Paradox*. Manchmal wird es auch als ›Gödels Paradox‹ bezeichnet.[9] Tatsächlich stellen sich Gödels Paradox und der Lügner, identifiziert man wie Wittgenstein Wahrheit mit Beweisbarkeit, als identisch heraus.

Was kann demgegenüber eingewandt werden gegen Wittgensteins Bereitschaft, Widersprüche zu akzeptieren? Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Erst einmal könnte man natürlich einwenden, dass Wittgensteins Sicht nicht richtig sein kann, da ein solcher Widerspruch zutiefst gegen das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch verstößt: Widersprüche können nicht wahr sein. Wittgenstein wäre zweifellos unbeeindruckt von dieser logischen Plattitüde – und dies angesichts seiner übrigen Positionen zu Recht. In einem Sprachspiel wahr sein heißt einfach, sich durch die korrekte Befolgung der Regeln des Spiels zu ergeben. Und wenn es ein Spiel gibt, aus dem sich korrekterweise Sätze der Form A und ¬A ergeben, dann sei es so. Widersprüche sind in diesem Sprachspiel wahr. Vielleicht ist das Sprachspiel, das wir im Deutschen über das Beweisen in der *Principia* spielen, von dieser Art.

Vielleicht könnte man noch treffender einwenden, dass selbst wenn der Widerspruch wahr ist, er kaum so harmlos ist, wie Wittgenstein behauptet. Er ruiniert das Sprachspiel vollständig. Denn wir können aus ihm, mittels

[7] Siehe z. B. BGM, IV §§ 59f., S. 256, und ebenfalls VGM, S. 252ff.
[8] Siehe z. B. VGM, S. 252f.
[9] Siehe z. B. Priest (1987), S. 59, und Priest (1995), S. 159.

wohlbekannter Regeln des Spiels, jeden Satz herleiten: Widersprüche implizieren alles. Auch dies hätte auf Wittgenstein aber höchstwahrscheinlich keinen tiefen Eindruck hinterlassen. Zweifelsohne hätte er auf die Tatsache verwiesen, dass wir nicht alles aus Widersprüchen des Lügner-Typs herleiten. Ein Kritiker könnte einwenden, dass dies unerheblich sei: Die Regeln des Spiels gestatten uns, dies zu tun, ob wir es nun tatsächlich tun oder nicht, daher sei das Spiel nutzlos. Aber auch hier würde Wittgenstein vermutlich widersprechen. Welche sind die Regeln des Spiels, die Folgerungen über das Beweisen in der *Principia* leiten? Der Kritiker unterstellt lediglich, dass diese Regeln in etwa denen der klassischen Logik entsprechen, in der Widersprüche alles implizieren. Zweifelsohne hätte ein solcher Einwand keinen Eindruck hinterlassen, hätte man ihn zu Zeiten der Veröffentlichung der *Bemerkungen* gemacht. Die meisten Leute konnten damals kaum Alternativen zu den Regeln der ›klassischen Logik‹ ins Auge fassen – oder zumindest, wenn es denn andere Logiken gab, galt in diesen, wie in der intuitionistischen Logik, ebenfalls *ex falso*.

Die Geschichte ist Wittgenstein hier aber zu Hilfe gekommen. Wir wissen, dass es viele parakonsistente Logiken gibt, Logiken, in denen Widersprüche nicht alles implizieren. Tatsächlich war eine der hauptsächlichen Motivationen dafür, solche Logiken zu entwickeln, gerade der Gedanke, dass die richtige Logik zum Räsonieren über Paradoxien der Selbstreferenz eine parakonsistente Logik ist.[10] Wittgenstein konnte natürlich nichts von solchen zukünftigen Entwicklungen wissen.[11] In einer (bereits 1930 niedergeschriebenen) Bemerkung von großer Weitsicht sah er ihre Entwicklung aber bereits voraus: »Ja, ich sage schon jetzt voraus: Es werden mathematische Untersuchungen über Kalküle kommen, die einen Widerspruch enthalten, und man wird sich noch etwas darauf zugute tun, dass man sich auch von der Widerspruchsfreiheit emanzipiert.«[12]

Somit stand Wittgenstein der Idee einer parakonsistenten Logik keinesfalls ablehnend gegenüber; und dem Einwand, dass der in Frage stehende Widerspruch die Sprache mit ihren Regeln ruiniert, da sich aus diesen alles ergibt, kann adäquat begegnet werden, wenn die zugrunde liegende Logik des Spiels parakonsistent ist. (Man könnte freilich dafür argumentieren, dass

[10] Ein umfassender Überblick über parakonsistente Logiken findet sich in Priest (2002). Eine Verteidigung der Position, dass eine parakonsistente Logik die richtige Logik ist, um über die Paradoxien der Selbstreferenz zu räsonieren, findet sich in Priest (1987).

[11] Es gibt eine isolierte Bemerkung – VGM, S. 252f. –, die nahelegt, dass Wittgenstein die Möglichkeit guthieß, dass ein Widerspruch nichts impliziert, und somit eine Art konnexiver parakonsistenter Logik vertrat. Er scheint die Idee aber nie im Detail verfolgt zu haben.

[12] WWK, S. 139.

der in Frage stehende Widerspruch aus einem anderen Grunde inakzeptabel sei. Aber das wäre eine andere Problematik.)

Das ist allerdings noch nicht das Ende der Geschichte; Wittgenstein ist nicht so leicht aus dem Schneider. Er berücksichtigt nicht nur die Möglichkeit, dass wir einen Widerspruch nachweisen könnten, wenn wir darüber nachdenken, was in der *Principia* beweisbar ist. Er betrachtet auch die Möglichkeit, dass ein Widerspruch in der *Principia* selbst beweisbar sein könnte. Argument (B) ist nicht ein Argument in der *Principia* oder braucht es nicht zu sein. Es ist einfach ein Argument im ›metasprachlichen Sprachspiel‹. In Bemerkung 11 zieht Wittgenstein jedoch explizit die Möglichkeit in Betracht, dass dieser Beweis oder ein entsprechender auf der Grundlage der *Principia* selbst durchgeführt werden könnte (»Wenn nun dieser Beweis einer in Russells System wäre ...«) – obwohl nichts im Vorangegangenen ihm diese Idee aufzuzwingen scheint. (Es gibt hier eventuell einen weiteren kleinen Flüchtigkeitsfehler. Er erachtet einen Beweis von P und $\neg P$ im Rahmen der *Principia* als Nachweis dafür, dass P in der *Principia* sowohl beweisbar ist als auch nicht beweisbar ist. Dies folgt nicht – zumindest nicht ohne (I) und seine Kontraposition.)

In diesem Falle ist Wittgensteins Bereitschaft, den Widerspruch zu akzeptieren, sicherlich fehl am Platze. Denn die Ableitungsregeln der *Principia sind* ganz explizit diejenigen der klassischen Logik. Daher richtet ein Widerspruch im System hier großen Schaden an. Er sorgt dafür, dass alles ›wahr‹ in der *Principia* ist. Sicherlich erweist dies das System und seine Widersprüche nicht als völlig nutzlos: Wir könnten es immer noch verwenden, um Kalligraphie zu betreiben oder zur Illustration, wie ein triviales System ausschaut etc. Aber es ist nutzlos, falls wir es im Sinne, in dem es üblicherweise für anwendbar gehalten wird, einsetzen wollten, um etwas Interessantes über Zahlen zu erfahren.

Selbst hier kann man jedoch etwas Wichtiges lernen. Die *Principia* ist nur ein Beispiel dafür, worüber Wittgenstein spricht. Und es ist wahr, dass ähnliche Überlegungen auf jedes formale System der Arithmetik zutreffen, das auf einer Logik basiert, in der *ex falso* gilt. Formale Systeme der Arithmetik können aber auch auf einer parakonsistenten Logik beruhen. Solche Systeme sind in der Tat mittlerweile wohlbekannt – selbst inkonsistente Systeme der Zahlentheorie. Solche Systeme können die gesamte Standardzahlentheorie enthalten und sogar vollständig sein in dem Sinne, dass jeder Satz oder seine Negation (oder beides) beweisbar ist.[13]

Für solche Systeme ist es nicht nur klar, im Gegensatz zum Falle unseres informellen metatheoretischen Räsonierens im Deutschen über Beweisbarkeit, dass die zugrunde liegende Logik parakonsistent ist; es ist auch

[13] Siehe z. B. Priest (1997) und (2000).

nachweisbar, dass die Widersprüche in bestimmten Bereichen in Quarantäne gestellt werden und somit nicht die generelle Anwendbarkeit des Systems zerstören. Schließlich gibt es Systeme dieser Art, in denen im Falle des ›unentscheidbaren Gödelsatzes‹ $\neg\exists x\, B(x, \mathbf{n})$ sowohl der Satz als auch seine Negation beweisbar sind – genau wie es Wittgenstein hier ins Auge fasst. Somit kann eine solche Arithmetik formal Gödels Paradox kodieren (wobei Beweisbarkeit als Beweisbarkeit innerhalb des Systems verstanden wird).[14] Selbst wenn Wittgenstein in Hinblick auf die *Principia* im Unrecht ist, kann seine Sichtweise doch ganz richtig sein, wenn man sie auf bestimmte formale Systeme parakonsistenter Arithmetik anwendet.

Vielleicht müssen wir also die Äquivalenz (I) nicht aufgeben. Wir könnten mit der Konsequenz leben müssen, dass ein Widerspruch wahr ist, aber vielleicht können wir das. Das Fazit ist, dass es Sätze gibt, die wahr und falsch sind, die beweisbar sind und eine beweisbare Negation besitzen – unabhängig davon, ob wir von Wahrheit/Beweisbarkeit im Rahmen des Spiels eines formalen Systems oder von unserem metatheoretischen Spiel sprechen. Nicht einmal dies bringt Wittgensteins ursprüngliche Behauptung in Gefahr, dass arithmetische Sätze keine Propositionen ausdrücken.

5. Die Frage der Bedeutung

Vielleicht können wir also einen Widerspruch akzeptieren. Damit sind aber kaum alle Fragen geklärt. Wenn wir sowohl *P* bewiesen als auch bewiesen haben, dass *P* unbeweisbar ist, was in aller Welt *bedeutet* dann der Beweis der Unbeweisbarkeit? Wittgenstein probiert eine naheliegende Möglichkeit aus.

> 14. Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, dass die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: »Bemüh' dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilung des Winkels, etwa) zu finden, – man kann beweisen, dass es nicht geht.« Das heißt: es ist wesentlich, dass sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muss – könnte man sagen – für uns ein *triftiger Grund* sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben.
>
> Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

Man könnte sich einen Unbeweisbarkeitsbeweis wie einen Beweis vorstellen, dass eine bestimmte geometrische Aufgabe nicht mit Lineal und Zirkel

[14] Siehe zur gesamten Thematik Priest (1994).

ausgeführt werden kann. Es ist ziemlich naheliegend, sich die Sache so vorzustellen. Der geometrische Beweis zeigt, dass eine bestimmte Form nicht mit Hilfe bestimmter Verfahrensweisen erzeugt werden kann; und ein Unbeweisbarkeitsergebnis kann als Hinweis darauf verstanden werden, dass eine bestimmte syntaktische geometrische Form nicht mit Hilfe bestimmter Verfahrensweisen erzeugt werden kann. Der geometrische Beweis enthält offenbar ein empirisches Element. Wir wissen, dass niemand tatsächlich diese Form mit Hilfe jener Verfahrensweisen erzeugen wird, unabhängig davon, wie sehr man sich anstrengt. Kann man sich den Gehalt des Unbeweisbarkeitsergebnisses auf dieselbe Weise vorstellen: Niemand wird jemals die Form *P* erzeugen, wenn man sich dabei an die Regeln des Spiels hält? Nein. Geht man von (I) aus, ist der Beweis der Unbeweisbarkeit selbst ein Beweis von *P*. Und wenn wir über einen Beweis von *P* verfügen, können wir natürlich die Aussage der Unbeweisbarkeit nicht auf diese Weise interpretieren! Die widersprüchliche Natur dessen, was bewiesen wurde, nimmt ihr jeglichen empirischen Gehalt dieser Art – bzw., wie Wittgenstein es bereits in Bemerkung 12 ausgedrückt hat, paradoxe Sätze sind unbrauchbar.

Wenn aber die Aussage der Unbeweisbarkeit nicht auf diese Weise zu verstehen ist, was könnte sie sonst bedeuten? Wittgenstein versucht es mit einem anderen und allgemeineren Ansatz.

> 15. Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird »*X* ist unbeweisbar«, hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen ›Sinn‹.

Die Frage ist somit, ob der ›Beweis der Unbeweisbarkeit von *P*‹ hier ein zwingender Grund für die Annahme ist, dass ein Beweis von *P* nicht gefunden werden wird.

> 16. Der Satz »*P* ist unbeweisbar« hat einen andern Sinn, nachdem – als ehe er bewiesen ist.
>
> Ist er bewiesen, so ist er die Schlussfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises. – Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist – kann man sagen – noch verschleiert.

Um es einfach auszudrücken (was immer eine gefährliche und potentiell irreführende Sache ist, wenn es um Wittgenstein geht): Die Bedeutung eines mathematischen Theorems wird durch seinen Beweis bestimmt. Der Beweis gibt uns gewissermaßen ein Kriterium für seine Behauptbarkeit. Haben wir noch keinen Beweis gefunden, verfügen wir über keine Gründe, es zu behaupten; und in einem Sinne wissen wir nicht, was es bedeutet. Und finden wir einen neuen Beweis, haben wir ein neues Kriterium, es zu behaupten, so dass sich, in einem Sinne, seine Bedeutung geändert hat. Wenn dies richtig ist, müssen wir einen Blick auf den Beweis dieses Satzes werfen, um herauszufinden, was die Behauptung, dass *P* unbeweisbar ist, in diesem Kontext heißt. Der Beweis, dass *P* unbeweisbar ist, wird uns den Sinn dieser Konklusion liefern – und vermutlich wird dies nicht darauf hinauslaufen, dass eine Konstruktion einer bestimmten Art nicht aufgefunden werden kann.

Wittgenstein versucht hier nicht, seine Sicht hinsichtlich der Verbindung zwischen Bedeutung und Beweis zu verteidigen, aber vereinzelte Überlegungen über die Verbindung sind über die *Bemerkungen* verstreut (siehe z. B. S. 162f., 367). Zusammen bilden diese Überlegungen eines der schwierigeren und problematischen Themen der *Bemerkungen*. Im Folgenden will ich einige Aspekte des Themas entwirren.

Um den Sinn einer Proposition zu bestimmen, müssen wir uns ihren Beweis ansehen. Bemerkung 15 erinnert uns aber daran, dass der Beweis nicht aus dem Gesamtsystem der Operationen herauszulösen ist, die den Begriff des Beweises ausmachen. Daher könnte es treffender sein, zu sagen, dass die Bedeutung eines Satzes in seinen Beweisbedingungen besteht, die solche systematischen Verbindungen angeben. In einer solchen Form ist die Position hinreichend bekannt. Beispielsweise handelt es sich hier bekanntermaßen gerade um die Bedeutungskonzeption, die von den Intuitionisten vorgebracht wird. Natürlich dürfte ein klassischer Logiker dies ablehnen. Der Sinn eines Satzes besteht in seinen Wahrheitsbedingungen, nicht in seinen Beweisbedingungen. Wir können hier aber beiseitelassen, was von dieser Meinungsverschiedenheit abhängt. Wittgenstein hat ja die Wahrheit (in einem Spiel) mit dem Beweis (in diesem Spiel) identifiziert. Ausgehend von dieser Annahme können wir daher gleichermaßen von Beweisbedingungen oder von Wahrheitsbedingungen sprechen. Und sowohl klassische als auch intuitionistische Logiker können sich darauf einigen, dass die Bedeutung eines Satzes durch seine Beweis-/Wahrheitsbedingungen gegeben ist.

So weit führt uns Bemerkung 15. Unglücklicherweise geht Wittgenstein in Bemerkung 16 noch einen Schritt weiter. Es sind nicht nur die möglichen Beweise (die Beweisbedingungen), die die Bedeutung eines Satzes bestimmen, sondern die Beweise, über die wir aktual verfügen. Diese These umgibt ein Hauch des Paradoxen. Wenn wir nicht verstehen, was ein Satz bedeutet, solange wir nicht über einen Beweis des Satzes verfügen, wie sollten wir einen Beweis als solchen erkennen können, wenn wir ihn sehen? Und wenn die Existenz eines neuen Beweises die Bedeutung eines Satzes verändert, warum zeigt dies nicht, dass die alten Beweise nicht mehr funktionieren? Immerhin bewiesen sie den Satz mit seiner alten Bedeutung. Und die Reihenfolge, in der wir die Beweise finden, ist vermutlich nicht von logisch-semantischer Bedeutung, so dass, wenn der neue Beweis die alten Beweise untergräbt, wohl auch die alten Beweise den neuen untergraben. Hier liegt ein Gewirr von Problemen vor und dies ist nicht der Ort, um sie zu diskutieren. Letzten Endes ist Wittgensteins Position, wie ich glaube, nicht zu halten. Glücklicherweise können wir die Problematik größtenteils ignorieren. Die folgenden Bemerkungen Wittgensteins beziehen sich nur einmal auf diese stärkere Behauptung, und dies nicht einmal in einer essentiellen Weise. Dabei handelt es sich nicht um einen Zufall. Im vorliegenden Fall verfügen wir ja tatsächlich über den Beweis der Unbeweisbarkeit von *P*, so dass wir den Sinn untersuchen können, den dieser seinem Ergebnis zuführt. Soweit es die vorliegende Diskussion betrifft, können wir einfach davon ausgehen, dass der Sinn eines Satzes durch seine Beweisbedingungen (= Wahrheitsbedingungen) gegeben ist, und anderen die Sorge um Wittgensteins extremere Sichtweise überlassen.

Bevor wir fortfahren, ist ein weiterer Kommentar hinsichtlich des extremen Verifikationismus Wittgensteins erforderlich. Dieser impliziert plausiblerweise einen gewissen Voluntarismus in Hinblick auf das Beweisen. Angenommen, wir wollen eine Schlussregel anwenden. Nehmen wir zur Veranschaulichung an, dass wir A und A → B gezeigt haben und nun *Modus Ponens* anwenden wollen. Dies würde uns erlauben, auf B zu schließen; dies zu tun, änderte aber dadurch, dass wir einen neuen Beweis von B erhalten, dessen Bedeutung; und es gibt keinen Grund zur Annahme, dass A und A → B, mit ihren gegenwärtigen Bedeutungen, *dies* implizieren. Natürlich wird B, haben wir erst einmal *Modus Ponens* angewandt, seine Bedeutung geändert haben. Und mit der neuen Bedeutung von B werden A und A → B *dies* implizieren. Aber nun haben wir die Wahl. Wir können uns dazu entschließen, *Modus Ponens* anzuwenden und die Konsequenzen zu akzeptieren; oder wir können uns dazu entschließen, dies nicht zu tun und daher die Anwendung der Regel als ungültig zu erachten. Somit stellt uns ein vermeintlicher Beweis vor die *Entscheidung*, ihn zu akzeptieren oder ihn nicht zu akzeptieren. Wittgenstein scheint freilich einen solchen Voluntarismus an einigen Stellen (z. B. in den *Bemerkungen*, S. 163, 268) gutzuheißen. Aber es ist klar, dass dies schlecht zu vereinbaren ist mit der Phänomenologie des Beweisens. In der Tat scheint die Konklusion in einiger Spannung zur Konzeption des Regelfolgens in den *Untersuchungen* zu stehen. Die Anwendung von *Modus Ponens* (oder einer ähnlichen Regel) ist einfach etwas, was man letzten Endes blind tut. Wenn ich mich dazu entschließe, ihn nicht anzuwenden, werden meine Fachkollegen im Regelfolgen einfach sagen, dass ich nicht verstanden habe. Allerdings liegt es nahe, anzunehmen, dass Wittgensteins Verifikationismus mit seinem zugehörigen Voluntarismus ein Zug der späteren mittleren Phase von Wittgensteins Denken ist, der zur Zeit der ausgereiften *Untersuchungen* über Bord geworfen wurde.[15] Es wäre daher wiederum weise, nicht zu viel Substantielles davon abhängen zu lassen.

6. Bemerkung 17

Nachdem die Verbindung zwischen Bedeutung und Beweis dargelegt wurde, wendet Wittgenstein, wie man es erwarten würde, die Idee als Nächstes auf Beweise von *P* und seine Unbeweisbarkeit an. Die nächste Bemerkung wirft eine der schwierigeren exegetischen Herausforderungen des gesamten Abschnitts auf. Ich werde daher den Kommentar in Teile aufgliedern. Die Bemerkung beginnt wie folgt:

> 17. Wie, soll ich nun annehmen, ist *P* bewiesen? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis? Oder auf eine andere Weise? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, *was* bewiesen ist, schau an den Beweis! Vielleicht ist hier bewiesen, dass die und die Form des Beweises nicht zu *P* führt. – Oder, es sei *P* auf eine direkte Art bewiesen – wie ich einmal sagen will –, dann folgt also der Satz »*P* ist unbeweisbar«, und es muss sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von *P* mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei.

Wittgenstein unterscheidet zwischen ›*P* durch einen Beweis der Unbeweisbarkeit beweisen‹ und es direkt zu beweisen. Die Unterscheidung ist nicht völlig klar, ich gehe aber davon aus, dass es sich im Wesentlichen um die Unterscheidung zwischen dem metasprachlichen Beweis, dass *P* nicht beweisbar ist, und dem objektsprachlichen Beweis von *P* handelt. Im ersten Falle erinnert uns Wittgenstein lediglich wieder daran, den Beweis zu betrachten, um den Sinn seiner Konklusion zu sehen; er schlägt vor, dass der Sinn darin bestehen könnte, dass die und die Beweisformen nicht zu *P* führen. Vermutlich verhält es sich wie im Falle eines Beweises, dass eine Konstruktion nicht mit Lineal und Zirkel ausgeführt werden kann. Wittgenstein sagt uns nicht explizit, welche Schlussfolgerungen hieraus gezogen werden sollten, er hat aber bereits in Bemerkung 8 angedeutet, dass wir damit rechnen sollten, (I) aufgeben zu müssen. Wenn (I) gilt, dann würde *P* selbst bedeuten müssen, dass es keinen Beweis für es gibt. Wenn es aber wirklich ›wahr in Russells System‹ ist oder wäre, *wäre P* in der *Principia* beweisbar; in dem Falle könnte es nicht diese Bedeutung haben. Um zu sehen, was es bedeutet, hätten wir, wenn überhaupt, den *Principia*-Beweis von *P* zu betrachten. Es scheint jedenfalls, dass die Interpretation (I) nur durch eine Äquivokation aufrechterhalten

[15] Eine weitergehende Diskussion von Wittgensteins Verifikationismus/Voluntarismus findet sich bei Wright (1980), insbesondere auf S. 364–386, der Dummett folgend die Position als radikalen Konventionalismus bezeichnet.

werden kann. Ohne eine solche Äquivokation muss sie aufgegeben werden und in diesem Falle droht dann, wie wir gesehen haben, kein Widerspruch.[16]

Die andere Möglichkeit ist, dass P im Rahmen der *Principia* selbst bewiesen wird. Dies zeigt, dass ein solcher Beweis durchgeführt werden kann. Was auch immer P bedeutet, wird es vermutlich nicht auf etwas in der Art hinauslaufen, dass es keinen solchen Beweis gibt. Wiederum müssen wir den *Principia*-Beweis betrachten, um festzustellen, was genau das Ergebnis bedeutet. Aber auch in diesem Falle sieht es so aus, wie Wittgenstein dieses Mal explizit sagt, als werden wir die Interpretation (I) verwerfen wollen, so dass sich kein Widerspruch ergibt.

Im weiteren Verlauf der Passage wird die Möglichkeit betrachtet, dass $\neg P$ bewiesen ist, d. h. aufgrund von Annahme (I) (oder zumindest ihrer Kontraposition), dass P beweisbar ist. Worin besteht ein solcher Beweis?

> Angenommen aber, nicht-P sei bewiesen. – *Wie* bewiesen? Etwa dadurch, dass P direkt bewiesen ist – denn daraus folgt, dass es beweisbar ist, also nicht-P. Was soll ich nun aussagen: »P«, oder »nicht-P«? Warum nicht beides? Wenn mich jemand fragt: »Was ist der Fall – P, oder nicht-P?«, so antworte ich: P steht am Ende eines Russell'schen Beweises, du schreibst also im Russell'schen System: P; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch nicht-P aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russell'schen Beweises, gehört also nicht zum Russell'schen System. – Als die Deutung »P ist unbeweisbar« für P gegeben wurde, da kannte man ja diesen Beweis für P nicht und man kann also nicht sagen, P sage: *dieser* Beweis existierte nicht. – Ist der Beweis hergestellt, so ist damit eine *neue Lage* geschaffen: Und wir haben nun zu entscheiden, ob wir *dies* einen Beweis (*noch* einen Beweis), oder ob wir *dies* noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen.

Nehmen wir an, $\neg P$, d. h., dass P beweisbar ist, wird gezeigt durch die Erstellung eines *Principia*-Beweises für P. Tatsächlich haben wir gerade diese Möglichkeit betrachtet. Das Fazit war, wie wir gesehen haben, dass P und ›P ist nicht beweisbar‹ so aufgefasst werden müssen, dass sie verschiedene Sinne besitzen. Wir können dann beides sagen, P und $\neg P$: P ist wahr in dem Sinne, dass es am Ende eines *Principia*-Beweises erscheint. Aber P ist beweisbar ($\neg P$), da dies in der Metasprache bewiesen wird. Wenn es keine Äquivokation geben soll, muss (I) aufgegeben werden, und die Konsistenz wird beibehalten.

---

[16] Man vergleiche den Fall, den Wittgenstein betrachtet, mit einem üblichen Verständnis der Angelegenheit. Letzterem zufolge lieferte uns Gödel einen metatheoretischen Beweis der Unbeweisbarkeit des unentscheidbaren Satzes – ausgehend von der Annahme der Korrektheit der *Principia*. Und das Ergebnis des Beweises zeigt tatsächlich – von derselben Annahme ausgehend –, dass es keine geometrische Konstruktion einer bestimmten Art gibt. Da das Beweisprädikat in P tatsächlich die Beweisbarkeit arithmetisch ausdrückt, gilt (I) und somit ist P wahr im Standardmodell. Die Konsistenz wird nicht durch das Aufgeben von (I) gewahrt, sondern durch die Unterscheidung zwischen Beweis und Wahrheit im Standardmodell.

Tatsächlich ist dies nicht genau das, was Wittgenstein sagt. Hier handelt es sich um die eine Stelle, an der seine radikalen Ansichten zur Natur des Beweises sich auswirken. Er behauptet, dass zu dem Zeitpunkt, zu dem man (I) gebilligt hat, kein *Principia*-Beweis von *P* bekannt war. (Setzt man voraus, dass die *Principia* konsistent ist, gibt es keinen.) Daher kann *P*, wenn ein solcher Beweis auftauchen sollte, nicht bedeuten, dass dieser Beweis nicht existiert. (Dies scheint nicht plausibel zu sein. Wenn ich behaupte, dass alle Schwäne weiß sind, und ein australischer Schwan auftaucht, war es sicherlich Teil meiner Behauptung, dass dieser Schwan weiß ist. Die Behauptung ist schlicht falsch.) Darüber hinaus haben wir, wenn wir mit einem solchen vermeintlichen Beweis konfrontiert sind, eine Wahl: Wir können ihn entweder *bona fide* akzeptieren und die metatheoretische Aussage so interpretieren, dass sie seine Existenz nicht leugnet, oder darauf bestehen, dass sie seine Existenz leugnet, und den vermeintlichen *Principia*-Beweis zurückweisen. Dieser Schritt beruht auf Wittgensteins Voluntarismus und ich bezweifle, dass man ihm letzten Endes viel Sinn abgewinnen kann. Wie dem aber auch sei; das Fazit dieser Art und Weise, die Dinge zu betrachten, ist dasselbe wie dasjenige, das ich gerade beschrieben habe. Wenn *P* einen *Principia*-Beweis besäße, könnte man an Interpretation (I) nur festhalten, indem man der rechten Seite eine andere Bedeutung gibt. Eine Inkonsistenz ergäbe sich dann nicht.

Wie steht es mit der anderen Möglichkeit, dass $\neg P$ direkt nachgewiesen wird?

> Angenommen nicht-*P* sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, dass sich P direkt beweisen lässt! Das ist also wieder eine Frage der Deutung – es sei denn, dass wir nun auch einen direkten Beweis von *P* haben. Wäre es nun so, nun, so wäre es so. –
>
> (Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

Die Lage ist ähnlich der im vorhergehenden Fall. Nehmen wir an, wir verfügten über einen *Principia*-Beweis von $\neg P$. Setzen wir (I) (oder seine Kontraposition) voraus, können wir beweisen, dass *P* beweisbar ist. Ist so *P* nicht direkt beweisbar, dann kann ›*P* ist beweisbar‹, was auch immer es bedeuten mag, nicht so verstanden werden, als behauptete es die Existenz eines solchen Beweises. (I) kann daher nur zugestimmt werden, wenn man der rechten Seite eine andere Bedeutung gibt. Natürlich ist dies nicht mehr der Fall, wenn man ebenfalls *P* direkt beweisen kann. In dem Fall wären wir allerdings in der Lage, sowohl *P* als auch $\neg P$ in der *Principia* zu beweisen, und das System wäre inkonsistent. Sowohl Wittgenstein als auch ich haben bereits die Lage erörtert, die dann eintreten würde.

Welches Fazit sollen wir aus alldem ziehen? Wittgenstein sagt uns nicht, in welcher dieser Situationen wir uns befinden. Er betrachtet einfach alle Fälle, einschließlich der Möglichkeit, dass die *Principia* inkonsistent ist. In den meisten der Fälle ist das Fazit seiner Überlegungen, dass man (I) zurückzuweisen hat oder zumindest, dass man eine seiner Seiten neu zu interpretieren hat. Tut man dies, ergibt sich, wie er bereits in Bemerkung 8 herausgestellt hat, kein Widerspruch. Wenn die *Principia* inkonsistent ist, ist die Lage jedoch eine andere. Wir können an (I) festhalten. Wir leben einfach mit dem Widerspruch. Wie ich bereits bei der Kommentierung der Bemerkungen 11–13 festgestellt habe, ist Wittgensteins Optimismus hier, streng genommen, ungerechtfertigt.[17] Aber hinsichtlich der inkonsistenten Arithmetiken, in denen sowohl der Gödelsatz als auch seine Negation beweisbar sind, könnte er durchaus richtig liegen.

Um auf Wittgensteins ursprüngliches Anliegen in der Sache zurückzukommen, ist es jedenfalls so, ob wir nun (I) zurückweisen oder den Widerspruch akzeptieren, dass sich die Lücke zwischen Wahrheit (in der *Principia*) und Beweisbarkeit (in der *Principia*) nicht auftut, so dass die Ergebnisse von Gödels Theorem keinen Einwand gegen Wittgensteins Identifikation der beiden liefern oder gegen seinen ursprünglichen Gedanken, dass Sätze der Arithmetik keine Propositionen ausdrücken.[18]

---

[17] Man könnte jedoch anmerken, dass durchaus angenommen werden könnte, dass eine Anwendung von Wittgensteins Voluntarismus ihm hier aus der Bredouille helfen könnte. Ist ein Widerspruch in der *Principia* gegeben, könnte man sich einfach dazu entschließen, die Regel *ex falso* nicht anzuwenden.

[18] Eine etwas andere Interpretation von Bemerkung 17 wurde mir von Brad Armour-Garb vorgeschlagen. Dieser Interpretation zufolge bekräftigt Wittgenstein den Gedanken, dass verschiedene Beweise eines Satzes ihm wortwörtlich verschiedene Sinne verleihen – im selben Sinne, in dem die Operationalisten sagen, dass die Tatsache, dass es verschiedene Verifikationen einer empirischen Behauptung gibt, Letztere als mehrdeutig erweist. In diesem Falle zeigt die Tatsache, dass es verschiedene Beweise der linken und der rechten Seiten von (I) gibt, dass man daran nur durch Äquivokation festhalten kann.

Nur wenn ein und derselbe Beweis beide Seiten beweist, kann an (I) festgehalten werden – in diesem Falle resultiert ein Widerspruch.

Ich denke, dass der Text schon auf diese Weise interpretiert werden kann, auch wenn ich die Interpretation weniger überzeugend finde. Zunächst einmal akzeptiert Wittgenstein die Tatsache, dass verschiedene Beweise dieselbe Kraft haben können (siehe etwa BGM, S. 409), obwohl ihn klarerweise die Sicht reizt, dass verschiedene Beweise desselben Theorems ihm verschiedene Sinne verleihen. Aber selbst wenn er die in Frage stehende Sicht akzeptierte, ist es nicht sehr plausibel anzunehmen, dass er sie an dieser Stelle anwendet. Denn wenn er es täte, würde er kaum alle verschiedenen Fälle einzeln betrachten müssen, wie er es tut. Er könnte einfach das allgemeine Argument vorbringen, wie ich es gerade getan habe. Jedenfalls besitzt die Frage in unserem Fall keine größeren Konsequenzen: Letzten Endes läuft diese Interpretation auf genau dasselbe hinaus wie die Interpretation, die ich vorgeschlagen habe. Wir sollten (I) aufgeben und somit Konsistenz erhalten – falls die *Principia* nicht selbst inkonsistent ist.

7. Abschliessende Bemerkungen

Der Großteil der philosophischen Auseinandersetzung ist nun vorüber. Die wenigen abschließenden Bemerkungen bringen die Sache ins Reine. Der Gesprächspartner hat noch einen letzten Versuch.

> 18. »Aber angenommen, der Satz wäre nun *falsch* – und daher beweisbar!« – Warum nennst du ihn ›falsch‹? Weil du einen Beweis siehst? – Oder aus andern Gründen? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z. B., dass wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten: »Ja, und nein«. Und desgleichen den Satz ›$\sim\sim p = p$‹: weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine *Verstärkung* der Verneinung verwenden und nicht bloß als ihre Aufhebung.

›Okay‹, sagt der Gesprächspartner, ›ich kann nicht sagen, dass P wahr und nicht beweisbar ist; aber ich kann auch nicht sagen, dass es falsch ist. Denn wenn es falsch ist, muss es beweisbar sein und somit nicht wahr.‹ Wittgenstein braucht bloß daran zu erinnern, dass ›falsch‹ genauso mehrdeutig ist, wie es ›wahr‹ und ›beweisbar‹ sind. Sagt man, dass es falsch ist, könnte das bedeuten, dass es einen *Principia*-Beweis für seine Negation gibt. Damit haben wir uns schon im Zusammenhang mit der vorhergehenden Bemerkung beschäftigt. Wenn es etwas anderes bedeutet, dann könnte die Behauptung einen Sinn haben, der völlig kompatibel ist mit seiner Beweisbarkeit in der *Principia*. In dem Falle wäre ›P ist falsch und beweisbar‹ nicht wirklich ein Widerspruch, obwohl es danach aussehen mag, da wir eine Veränderung des Sinns in den Konjunkten haben. Schließlich ist es häufig der Fall, dass wir Antworten wie ›ja und nein‹ Sinn abgewinnen: ›ja‹ in einem Sinn und ›nein‹ in einem anderen. Ähnlich verhält es sich, wenn die Verdoppelung einer Negation nur zu ihrer Verstärkung führt; dann ist klar, dass $\sim\sim p$ etwas anderes bedeuten könnte als p. Nun geht Wittgenstein zum Angriff über.

> 19. Du sagst: » …, also ist P wahr und unbeweisbar.« Das heißt wohl: »Also P«. Von mir aus – aber zu welchem Zweck schreibst du diese ›Behauptung‹ hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlösschen im Barockstile.) Und wie könntest du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen?

Was auch immer man meint, wenn man korrekterweise das Ergebnis von Gödels Theorem ausdrückt, indem man sagt, dass ein Satz wahr, aber unbeweisbar ist, ist gut und schön, wie wir gesehen haben. Aber warum sollte man sich darum überhaupt kümmern? Bis man eine unabhängige Verwendungsweise für die Behauptung aufgezeigt hat, ist es einem nicht gelungen, allzu viel zu sagen. Wie in Bemerkung 12 festgestellt, scheint die Behauptung recht unbrauchbar zu sein. Und wenn die Behauptung keinen Gehalt besitzt, kann sie kein Problem für Wittgensteins ursprüngliche Ansichten über die Natur mathematischer Sätze darstellen.

Schließlich kehrt Wittgenstein explizit zu seinem Ausgangsproblem zurück und bringt den letzten Gedanken dazu in Bezug.

> 20. Man muss sich hier daran erinnern, dass die Sätze der Logik so konstruiert sind, dass sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien gar nicht *Sätze*; und dass man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen ›Sätzen‹ nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.

Mathematische Sätze haben keinen propositionalen Gehalt: Sie enthalten keine Information. Und wenn der Satz P keinen Gehalt hat, scheint das erst recht für ›P und P ist nicht beweisbar‹ zu gelten.

8. Schlussfolgerungen

Abschließend möchte ich die Gedankengänge der Diskussion zusammenführen und ihre bedeutsamsten Ergebnisse herausstellen. Den Kontext für Wittgensteins Diskussion von Gödels Theorem bildet der Gedanke, dass Sätze der Mathematik keinen propositionalen Gehalt besitzen. Wittgenstein bemüht sich, den Gedanken zu verteidigen, dass dies der Fall sein könnte. Gödels Ergebnis wird als ein Einwand gegen diese Position eingeführt – und insbesondere, wie sich herausstellt, gegen Wittgensteins Identifikation von Wahrheit mit Beweisbarkeit. Bis zum Ende der Bemerkungen ist der Einwand entsorgt worden, und die Position hat nach wie vor Bestand.

Wittgenstein diskutiert Gödels Ergebnis auf der Grundlage von zwei Hintergrundannahmen. Die erste ist die Redundanztheorie der Wahrheit und die zweite ist die Theorie der Sprachspiele. Die zweite von diesen ist ein bei Wittgenstein üblicher Preis. Bei der ersten ist dies weniger der Fall, allerdings haben Positionen dieser Art heute größere Popularität als zu den Zeiten, zu denen Wittgenstein die *Bemerkungen* schrieb. Jedenfalls stellt keine von beiden eine absurde Position dar.

Diese Annahmen sind nicht die üblichen, die in gegenwärtigen Diskussionen von Gödels Ergebnis gemacht werden. Insbesondere dürften die meisten dieser Diskussionen den modelltheoretischen Wahrheitsbegriff ins Feld führen. Wusste Wittgenstein um eine solche Möglichkeit? Hat er sie verstanden? Wer weiß? Der Text sagt dazu einfach nichts. Die orthodoxe Reaktion auf

Gödels Ergebnis ist jedoch, auf die Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache zu beharren. Ein bestimmter Satz kann nicht in der Objektsprache bewiesen werden, kann aber in der Metasprache (als wahr) bewiesen werden. Tatsächlich formuliert Wittgenstein diese Erwiderung, kurz nachdem er das Thema aufgegriffen hat. Dahingehende Behauptungen, dass Wittgenstein Gödels Theorem missverstanden hat, scheinen daher unangebracht zu sein.

Dem modelltheoretischen Wahrheitsverständnis zufolge ist die Äquivalenz (I) unproblematisch. Im Kontext von Wittgensteins Überlegungen ist dies nicht der Fall, und dies erlaubt ihm, die Äquivalenz zu hinterfragen. Insbesondere kann er fragen, was genau die rechte Seite bedeutet. Dies ermöglicht es ihm, die Diskussion in Bereiche fortzuführen, die jenseits derer liegen, die üblicherweise bei Diskussionen von Gödels Theorem gebilligt werden. Insbesondere bietet Wittgenstein die Idee auf, dass die Bedeutung eines Satzes durch seine Beweisbedingungen bestimmt ist. Da es Beweise auf der Objekt-Stufe und Beweise auf der Meta-Stufe gibt (um es in moderner Terminologie auszudrücken), bleiben die an (I) beteiligten Begriffe noch mehrdeutig. Bis auf einen Umstand denkt er jedoch, dass die Äquivalenz (I) zurückgewiesen werden sollte, wenn man einmal die relevanten Bedeutungen klärt. In diesem Fall steht nicht das Auftreten eines Widerspruchs bevor.

Der eine Umstand, in dem dies nicht der Fall ist, besteht darin, dass die *Principia* inkonsistent ist. In diesem Falle denkt er, dass (I) in Ordnung ist und sich ein Widerspruch ergibt. Ebenfalls glaubt er, dass dies keine wirklichen Probleme mit sich bringt. Der Gedanke, dass die Inkonsistenz der *Principia* unproblematisch ist, ist nicht zutreffend. Da die *Principia* auf einer Logik mit *ex falso quodlibet* beruht, heißt dies, dass alle Sätze beweisbar wären, was zu ihrer Nutzlosigkeit für die meisten interessanten Zwecke führte. Soweit sich in den *Bemerkungen* definitive Fehler finden, ist dieser plausiblerweise einer davon.

Wenn wir es mit einer inkonsistenten Metatheorie zu tun haben, ist die Lage jedoch eine andere. Sofern die Metatheorie auf einer parakonsistenten Logik beruht, kann die Inkonsistenz völlig akzeptabel sein. Dasselbe gilt, sofern wir eine Arithmetik als Objekttheorie verwenden, die auf einer parakonsistenten Logik basiert. Wie ich bereits angemerkt hatte, sind solche Arithmetiken, in denen sowohl der Gödelsatz als auch seine Negation beweisbar sind – und die somit ›Gödels Paradox‹ kodieren –, mittlerweile wohlbekannt. Nichts von den formalen Arbeiten über parakonsistente Logiken und inkonsistente Arithmetik war freilich zu der Zeit bekannt, in der Wittgenstein schrieb. Von einem orthodoxen Standpunkt aus könnten diese Möglichkeiten daher abwegig gewirkt haben. (Da diese Techniken nach wie vor recht unorthodox sind, könnte man dasselbe in der Tat immer noch sagen.) Hat man aber einmal diese Möglichkeiten beherzigt, sind Wittgensteins

Überlegungen hinsichtlich des Tolerierens von Widersprüchen keineswegs abwegig, und die Tatsache, dass er sie zu der Zeit anstellte, als er es tat, zeigt sowohl einen beeindruckenden Weitblick als auch bahnbrechende Originalität. Hier handelt es sich nicht um die zweitrangigen Gedanken eines ansonsten funkelnden Geistes.

Was über die verschiedenen Positionen zu sagen ist, die Wittgenstein vertritt, wie etwa, dass mathematische Sätze keinen propositionalen Gehalt besitzen, die Redundanztheorie der Wahrheit, die Akzeptierbarkeit parakonsistenter Logik und so weiter, steht natürlich auf einem anderen Blatt – und zwar auf einem, das nicht mehr in der Kürze dieses Aufsatzes unterzubringen ist. Diskussionen dieser Fragen können aber nur erschwert werden durch das Missverstehen von Wittgensteins Ansichten. Ich hoffe, dass dieser Aufsatz substantiell dazu beigetragen hat, dieses auszuräumen.[19]

Anhang
Gödels Theorem: Inkonsistenz vs. Unvollständigkeit

1. Einführung: Die Standardsicht

Im Zuge der Erklärung von Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem wird häufig gesagt, dass jede axiomatische Theorie der Arithmetik, die über entsprechende expressive Möglichkeiten verfügt, unvollständig sein muss. Das heißt, dass es wahre Sätze (im Standardmodell) geben wird, die nicht beweisbar sind. Diese Darstellung ist nicht exakt. Präziser ist: Sie muss entweder unvollständig oder inkonsistent sein.

2. Gödels Beweis

Sehen wir uns an, wieso. Um die Details von Gödels Beweis auf eine axiomatische Theorie anzuwenden, benötigt man das Folgende:[20]

---

[19] Ich danke Bernhard Weiss vielmals dafür, dass er das Thema dieses Essays vorgeschlagen hat, den Mitgliedern einer Diskussionsrunde an der Universität von St. Andrews für hilfreiche vorbereitende Überlegungen, Stuart Candlish für Ratschläge zur Übersetzung und insbesondere Brad Armour-Garb und Bernhard Weiss für umsichtige Kommentare zu Entwürfen dieses Aufsatzes.

[20] Es gibt natürlich andere Beweise des Theorems. Einer besteht darin, zunächst zu zeigen, dass die wahren Aussagen des Standardmodells nicht entscheidbar sind (etwa indem man das Haltetheorem beweist und zeigt, dass dies in der Arithmetik ausgedrückt werden kann). Nehmen wir dann an, es gäbe eine axiomatische Theorie, die alle im Standardmodell wahren Aussagen

A Gödelnummern werden syntaktischen Entitäten wie Formeln und Beweisen zugewiesen. Ist n eine Zahl, schreiben wir ihr Numeral als **n**. Ist A eine Formel mit der Gödelnummer n, schreiben wir $\langle A \rangle$ für **n**.

B Es gibt eine Formel mit zwei freien Variablen $B(x, y)$, welche die Beweisrelation von T arithmetisch ausdrückt. Das heißt:

(*i*) Wenn n Gödelnummer eines Beweises von A in T ist, dann ist $B(\mathbf{n}, \langle A \rangle)$ wahr im Standardmodell.

(*ii*) Wenn n nicht Gödelnummer eines Beweises von A in T ist, dann ist $\neg B(\mathbf{n}, \langle A \rangle)$ wahr im Standardmodell.

C Wenn wir $Prov(y)$ als $\exists x\ B(x, y)$ definieren, dann ist *Prov* ein Beweisprädikat für T. Das heißt (ich lasse die runden Klammern der Einfachheit halber weg): Wenn $T \vdash A$, dann $T \vdash Prov\langle A \rangle$

D Es gibt eine Formel, G, der Form $\neg Prov\langle G \rangle$.[21]

Das Argument verfährt nun wie folgt – man beachte dabei, dass der Beweis so gut wie keine Annahmen über die Logik von T macht.

Als Erstes können wir zeigen, dass, wenn G ein Theorem von T ist, T inkonsistent ist. Nehmen wir nämlich an, dass $T \vdash G$, heißt das wegen [D] $T \vdash \neg Prov\langle G \rangle$. Wegen [C] gilt aber $T \vdash Prov\langle G \rangle$.

Aufgrund von Kontraposition gilt, dass, wenn T konsistent ist, G kein Theorem ist. Daher gibt es keinen Beweis von G in T. Somit ist keine Zahl Gödelnummer eines Beweises von G. Nach [B(*ii*)] ist jede Formel der Form $\neg B(\mathbf{n}, \langle G \rangle)$ wahr im Standardmodell. Demnach ist $\forall x\ \neg B(x, \langle G \rangle)$, d. h. $\neg\exists x\ B(x, \langle G \rangle)$, d. h. $\neg \mathrm{Prov}\langle G \rangle$, d. h. G wahr im Standardmodell. Also ist T, falls es konsistent ist, unvollständig; und aufgrund von Kontraposition ist T, falls es vollständig ist, inkonsistent.

Was also das Theorem uns zeigt, ist, dass wir für hinreichend ausdrucksstarke axiomatische Theorien der Arithmetik, unabhängig von der ihnen zugrunde liegenden Logik, eine Wahl zwischen Inkonsistenz und Unvoll-

beweist, und dass die Theorie konsistent und vollständig ist. Wir hätten dann ein Entscheidungsverfahren: Wir zählen die Theoreme einfach auf, bis wir den gesuchten Satz oder seine Negation finden. Wenn die Theorie unvollständig ist, gibt es keine Garantie, dass entweder der Haltesatz (der Satz, der ausdrückt, dass eine bestimmte Berechnung endet) oder seine Negation auftauchen wird. Wenn die Theorie inkonsistent ist, sagt uns die Tatsache, dass die Negation des Haltesatzes aufgetaucht ist, nichts darüber, ob der Haltesatz jemals auftauchen wird. Da es kein Entscheidungsverfahren gibt, muss die eine oder andere der beiden Möglichkeiten der Fall sein.

[21] Wenn die Sprache von T nur die Funktionssymbole für die Nachfolgerfunktion, Addition und Multiplikation enthielte, könnte es kein G geben, das identisch mit $\neg Prov\langle G \rangle$ ist. Stattdessen hätten wir ein G derart, dass $T \vdash G \vee \neg Prov\langle G \rangle$. Jedoch ist die Beschränkung auf bloß diese drei Funktionssymbole klarerweise in einem gewissen Sinne arbiträr. Und wenn die Sprache Funktionssymbole für andere primitiv rekursive Funktionen enthält, insbesondere eines für die Diagonalisation, haben wir ein G, das identisch mit $\neg Prov\langle G \rangle$ ist.

ständigkeit haben. Normalerweise lässt man die erste Möglichkeit aus. Und dafür gibt es, wie man einräumen muss, einen guten Grund. Wenn die Theorie im Rahmen der klassischen Logik formalisiert wird, ist eine inkonsistente Theorie trivial und steht nicht mehr zur Debatte.

Wir wollen nun ernsthaft die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass die zugrunde liegende Logik eine parakonsistente ist, so dass wir vernünftig mit der Inkonsistenz umgehen können. Darüber hinaus gibt es vollständige inkonsistente (und nicht triviale) axiomatische Theorien der Arithmetik.

3. Die Inkonsistenz der Arithmetik

Könnte die Arithmetik aber wirklich inkonsistent sein? Man betrachte das Schema:

Wenn $Prov\langle A\rangle$, dann A

Wir wissen, dass in der Standardarithmetik das Schema nur für solche As beweisbar ist, die selbst beweisbar sind. Dies ist Löbs Theorem. Daher wollen wir dieses Schema ihm zu Ehren *Löbs Prinzip* nennen. Löbs Theorem ist ein etwas merkwürdiges Ergebnis. Löbs Prinzip sieht freilich so aus, als sollte es wahr sein; tatsächlich ist es wahr im Standardmodell.[22] Es drückt lediglich die Tatsache aus, dass alles Beweisbare wahr ist. Man *sollte* daher in der Lage sein, ihm in vernünftiger Weise Rechnung tragen zu können. Und dies ist tatsächlich möglich: Das Ergebnis ist Inkonsistenz.

Legen wir uns auf eine geeignete Sprache für die Arithmetik erster Stufe fest. Sei T die Theorie (d. h. die unter der Ableitbarkeitsbeziehung der zugrunde gelegten Logik abgeschlossene Menge von Sätzen – welche Logik dies auch immer sein mag), die alle Aussagen umfasst, die in der Sprache analytisch wahr sind. Wir wollen T als naive Arithmetik bezeichnen. Ich mache keine Annahme darüber, dass T axiomatisch ist. Selbst wenn dem nicht so ist, ist es vollkommen sinnvoll, darüber zu sprechen, was in T beweisbar ist. Dies wollen wir durch $\vdash$ bezeichnen.

Wir können davon ausgehen, dass die Sprache den Begriff einer Gödelnummerierung ausdrücken kann und dass die grundlegenden Tatsachen darüber in T gezeigt werden können. Darüber hinaus wollen wir annehmen, dass die in Frage stehende Sprache ein monadisches Prädikat P enthält, das diesen Begriff von Beweisbarkeit ausdrückt. Ist demnach A eine Formel der Sprache, drückt $P\langle A\rangle$ die Tatsache aus, dass A in T beweisbar ist. Aufgrund seiner

[22] Was natürlich bedeutet, dass es den Axiomen in konsistenter Weise hinzugefügt werden kann. Bei der Beweisbarkeit handelt es sich in diesem Falle jedoch um Beweisbarkeit im ursprünglichen Sinne, bevor das Schema hinzugefügt wurde. Wird *Prov* erst einmal in angemessener Weise definitorisch für das neue System gefasst, wird das System inkonsistent.

Bedeutung können wir davon ausgehen, dass P die folgenden Bedingungen erfüllt:

[1] $\vdash \neg P\langle A\rangle \vee A$
[2] Wenn $\vdash A$, dann $\vdash P\langle A\rangle$

[1] ist lediglich die materiale Version von Löbs Prinzip, die eine analytische Wahrheit zu sein scheint. [2] scheint ebenfalls aufgrund der Bedeutung von P zu gelten. Wenn A bewiesen werden kann, scheint gerade diese Tatsache einen Beweis von $P\langle A\rangle$ zu bilden.

Nun können wir aber die üblichen Fixpunktkonstruktionen einsetzen, um eine Formel G der Form $\neg P\langle G\rangle$ zu erhalten. Ein Beweis, dass T inkonsistent ist, liegt nun auf der Hand. Denn nach [1] gilt $\vdash \neg P\langle G\rangle \vee G$, d. h., $\vdash \neg P\langle G\rangle \vee \neg P\langle G\rangle$ und damit $\vdash \neg P\langle G\rangle$, d. h. $\vdash G$. Dann gilt aber wegen [2] $\vdash P\langle G\rangle$.

T ist damit inkonsistent. Dies zeigt natürlich nicht, dass das P-freie Fragment von T inkonsistent ist. Nach dem bisher Gesagten könnte das P-freie Fragment von T die Menge der im Standardmodell der Arithmetik wahren Aussagen sein. Eine inkonsistente Theorie kann natürlich eine konsistente Teiltheorie besitzen. P ist aber ein Prädikat von natürlichen Zahlen. In diesem Sinne ist es ein arithmetisches Prädikat. (Tatsächlich erscheint es etwas künstlich, es der Sprache der Arithmetik vorzuenthalten.) Und in diesem Sinne ist die Arithmetik inkonsistent.

4. Nicht-Trivialität

Könnte es aber ein solches kohärentes T geben? Man könnte vermuten, dass T nicht nur inkonsistent, sondern trivial ist. Ein Grund, dies anzunehmen, ist, dass es sich beim üblichen Beweis von Löbs Theorem im Wesentlichen um eine Version der Curry-Paradoxie handelt, die einen Beweis der Trivialität darstellt.[23] Es gibt jedoch auch völlig nicht-triviale Modelle.[24]

---

[23] Der Beweis folgt. Sei A ein beliebiger Satz. Eine Fixpunktkonstruktion liefert einen Satz, L, der in $Prov\langle L\rangle \supset A$ besteht. Dann gilt:

$T \vdash L \supset (Prov\langle L\rangle \supset A)$
$T \vdash Prov\langle L \supset (Prov\langle L\rangle \supset A)\rangle$
$T \vdash Prov\langle L\rangle \supset Prov\langle Prov\langle L\rangle \supset A\rangle$
$T \vdash Prov\langle L\rangle \supset (Prov\langle L\rangle \supset A)$ (da $T \vdash Prov\langle B\rangle \supset B$)
$T \vdash Prov\langle L\rangle \supset A$
$T \vdash L$
$T \vdash Prov\langle L\rangle$
$T \vdash A$

[24] Anm. d. Übers.: Eine erste Einführung in die Thematik verschiedener Systeme inkonsistenter Arithmetik und in die im Folgenden diskutierten kollabierten Modelle – auch im Zusammenhang mit Wittgensteins Auseinandersetzung mit Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem –

Betrachten wir ein endliches kollabiertes Modell des Standardmodells der Arithmetik; T sei seine Theorie. Insbesondere gehört zu T dann alles, was im Standardmodell wahr ist. Es kann gezeigt werden, dass T entscheidbar ist, so dass es durch eine – im üblichen Sinne – arithmetische Bedingung ausgedrückt werden kann, nennen wir sie *Prov*. Dann gilt:

[3] Wenn $A \in T$, ist $Prov\langle A\rangle$ wahr im Standardmodell und damit in T.
[4] Wenn $A \notin T$, ist $\neg Prov\langle A\rangle$ wahr im Standardmodell und damit in T.

Interpretieren wir P als *Prov*, erhalten wir aus [3] unmittelbar [2]. Was [1] betrifft: Entweder ist $A \in T$ oder $A \notin T$. Im ersten Falle gilt: $\neg Prov\langle A\rangle \vee A \in T$. Im zweiten Fall ist $\neg Prov\langle A\rangle \in T$ und damit wiederum $\neg Prov\langle A\rangle \vee A \in T$. Darüber hinaus ist T, falls es sich beim kollabierten Modell nicht um das triviale Modell handelt, bei dem alles mit 0 identifiziert wird, nicht trivial. Tatsächlich können wir die Größe des Anteils an Gleichungen von T so groß machen, wie wir wollen.

5. Naive Arithmetik

Wie bereits erwähnt, habe ich nicht angenommen, dass die naive Arithmetik rekursiv aufzählbar ist. Es gibt aber Überlegungen, die dies nahelegen. Kurz gesagt ist das Beweisen von Aussagen in der Mathematik und insbesondere der Arithmetik eine Fähigkeit, die gelehrt und gelernt wird. Die Annahme, dass die Grundsätze des naiven Beweisens axiomatisch sind, ist die naheliegendste Erklärung dieser Tatsache. Jede andere Erklärung würde das Erfassen dieser Grundsätze durch unseren kognitiven Apparat zu einer Art Mysterium machen. Und wenn dies in der Tat der Fall ist, dann kann P durch eine arithmetische Formel ausgedrückt werden und das P-freie Fragment von T ist selbst inkonsistent.

Warum sollte man sich dagegen sperren? Es nimmt der Arithmetik keine ihrer Stärken. Wenn wir es mit einer vollständigen Theorie zu tun haben, enthält diese alles, was man sich wünschen könnte. Zu befürchten wäre, dass sie *zu viel* enthält. Angenommen, die kleinste inkonsistente Zahl ist n. Dann wäre das Fragment der Arithmetik mit Quantoren, die auf Zahlen kleiner als n beschränkt sind, konsistent. Nun ist das Universum sehr groß; aber vom

---

findet sich in: Berto, F.: *There's Something about Gödel. The Complete Guide to the Incompleteness Theorem*, Malden (MA) & Oxford 2009; siehe insbesondere Kap. 12, Abschnitt 6. Vgl. auch: Mortensen, C.: Inconsistent Mathematics. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2017 Ed.), hg. von E. N. Zalta. URL = https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/mathematics-inconsistent/. Vgl. auch: Weber, Z.: Inconsistent Mathematics. In: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*, ISSN 2161-0002. URL = http://www.iep.utm.edu/, 02.01.2018. Zur weiterführenden Lektüre empfehlen sich etwa die in der Bibliographie dieses Aufsatzes aufgeführten Texte von G. Priest (1994), (1997), (2000) und (2002).

Standpunkt der modernen Physik scheint es endlich zu sein. Nehmen wir an, dass *n wirklich* eine enorm große Zahl ist – vielleicht größer als die Gesamtzahl aller Schachspiele, die man spielen könnte, wenn jedes subatomare Teilchen des Universums eine Spielfigur wäre. Dann scheint es, als hätte die Inkonsistenz der Arithmetik keine signifikanten praktischen Konsequenzen.

6. Coda: Gödels zweites Unvollständigkeitstheorem

Um unsere Diskussion abzurunden, wollen wir erörtern, was mit Gödels zweitem Unvollständigkeitstheorem im vorliegenden Kontext passiert. So wie das Theorem üblicherweise formuliert wird, besagt es, dass, wenn eine hinreichend starke Arithmetik konsistent ist, sie ihre eigene Konsistenz nicht beweisen kann. Wenn wir es mit einer inkonsistenten Arithmetik zu tun haben, ist der Nachweis der Konsistenz weder wünschenswert noch zu erwarten. Aber Nicht-Trivialität ist sowohl wünschenswert als auch zu erwarten. Insbesondere sollte man nicht in der Lage sein, zu beweisen, dass $0 = 1$.

Sei T eine vollständige axiomatische Arithmetik, in der $0 = 1$ nicht beweisbar ist. Dann gilt aufgrund von [B(*ii*)] aus Abschnitt 2, dass für jedes n $\neg B(\mathbf{n}, \langle 0 = 1 \rangle)$ wahr im Standardmodell ist. Also ist $\neg\exists x\, B(x, \langle 0 = 1 \rangle)$, d. h. $\neg Prov\langle 0 = 1 \rangle$ wahr im Standardmodell. Also gilt, dass $T \vdash \neg Prov\langle 0 = 1 \rangle$. Somit ist die Nicht-Trivialität von T beweisbar in T. Natürlich verhindert dies nicht, dass auch $Prov\langle 0 = 1 \rangle$ beweisbar ist. Ob dem so ist, wird von anderen Details der Theorie und ihrem Beweisbarkeitsprädikat abhängen.

Bibliographie

Anderson, A. R.: Mathematics and the ›Language Game‹. In: *Review of Metaphysics* 11, 1958, S. 446–458. Wiederabgedruckt in: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, hg. von P. Benacerraf & H. Putnam. Oxford 1964, S. 481–490.

Dummett, M.: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: *Philosophical Review* 68, 1959, S. 324–348. Wiederabgedruckt in: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, hg. von P. Benacerraf & H. Putnam. Oxford 1964, S. 491–509.

Floyd, J.: Prose versus Proof. Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth. In: *Philosophia Mathematica* 9, 2001, S. 280–307.

Kreisel, G.: Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics. In: *British Journal for the Philosophy of Science* 9, 1959, S. 135–158.

Priest, G.: *In Contradiction*, Dordrecht 1987.

Priest, G.: Is Arithmetic Consistent? In: *Mind* 103, 1994, S. 337–349.

Priest, G.: *Beyond the Limits of Thought*, Cambridge 1995. Überarbeitete Auflage Oxford ²2002.

Priest, G.: Inconsistent Arithmetic. I: Finite Models. In: *Journal of Philosophical Logic* 26, 1997, S. 223–235.
Priest, G.: Inconsistent Arithmetic. II: The General Case. In: *Journal of Symbolic Logic* 65, 2000, S. 1519–1529.
Priest, G.: Paraconsistent Logic. In: *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. 6, hg. von D. Gabbay & F. Guenthner. Dordrecht ²2002.
Wright, C.: *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, London 1980.

Übersetzt von Joachim Bromand

TEIL III.
(INKONSISTENTE) BEGRIFFSBILDUNGEN IN WITTGENSTEINS PHILOSOPHIE DER MATHEMATIK

ÜBER DIE AUTOREN

Joachim Bromand ist Privatdozent an der Universität Bonn. Zu seinen Forschungsschwerpunkten zählen die Erkenntnistheorie, Wissenschaftsphilosophie, Metaphysik, Sprachphilosophie, (Philosophische) Logik sowie die Argumentationstheorie. Veröffentlichungen (Auswahl): *Philosophie der semantischen Paradoxien* (mentis 2001), *Grenzen des Wissens* (mentis 2009), *Gottesbeweise. Von Anselm bis Gödel* (hg. zus. mit G. Kreis, Suhrkamp 2011, 5. Aufl. 2016); in Vorbereitung ist der Band *Gotteswiderlegungen* (hg. zus. mit G. Kreis, Suhrkamp 2018).

Kai Michael Büttner ist Dozent an der Universidad del Norte in Barranquilla (Kolumbien). Seine Forschungsschwerpunkte liegen in den Bereichen Sprachphilosophie und Philosophie der Mathematik. Wittgensteins Philosophie der Mathematik diskutiert er in seinen Aufsätzen »Surveyability and Mathematical Certainty«, in: *Axiomathes* 27, 2017, S. 113–128, und »Equinumerosity and one-one correlatability«, in: *Grazer philosophische Studien* 93, 2016, S. 152–177. Außerdem ist er Mitherausgeber des Sammelbandes *Themes from Wittgenstein and Quine* (*Grazer philosophische Studien* 89, 2014).

James Conant ist seit 1999 Chester D. Tripp Professor of Humanities an der University of Chicago. 2012 wurde Conant mit dem Anneliese Maier-Forschungspreis der Alexander von Humboldt-Stiftung ausgezeichnet und 2016 mittels einer Humboldt-Professur an die Universität Leipzig berufen. Dort leitet er zusammen mit Andrea Kern das Forschungskolleg Analytischer Deutscher Idealismus. Veröffentlichungen (Auswahl): *Friedrich Nietzsche: Perfektionismus und Perspektivismus* (Konstanz University Press 2014), *Varieties of Skepticism: Essays after Kant, Wittgenstein, and Cavell* (hg. zus. mit A. Kern, de Gruyter 2014)

Juliet Floyd promovierte 1990 an der Harvard University mit einer Arbeit zu Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Nach einer Professur an der City University of New York ist sie seit 1996 Professorin an der Boston University. Veröffentlichungen (Auswahl): *Future Pasts: Perspectives on the Place of the Analytic Tradition in Twentieth Century Philosophy* (hg. zus. mit S. Shieh, Oxford University Press 2001), *Philosophy of Emerging Media* (hg. zus. mit J. E. Katz, Oxford University Press 2016), *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing* (hg. zus. mit A. Bokulich, Springer 2017).

Hans-Johann Glock ist Professor für Philosophie an der Universität Zürich, Visiting Professor an der University of Reading, Humboldt Forschungspreisträger. Studium der Philosophie, Germanistik und Mathematik in Tübingen, Berlin und Oxford (D.phil.). Schwerpunkte: Philosophie des Geistes, Sprachphilosophie, Geschichte der Analytischen Philosophie, Wittgenstein. Veröffentlichungen (Auswahl): *A Wittgenstein Dictionary* (Blackwell 1996; dt. Übersetzung 2000), *Quine and Davidson* (Cambridge University Press 2003), *What is Analytic Philosophy?* (Cambridge University Press 2008; dt. Übersetzung 2014), *La Mente de Los Animales* (Krk Ediciones 2009). Zahlreiche herausgegebene Bände, zuletzt *A Companion to Wittgenstein* (Wiley-Blackwell 2017) und Aufsätze in internationalen Zeitschriften, insbesondere auch zum Geist der Tiere und zur Natur von Begriffen.

Felix Mühlhölzer ist Professor für Philosophie an der Universität Göttingen (seit April 2016 im Ruhestand). Sein früheres Hauptarbeitsgebiet war die Wissenschaftsphilosophie, siehe dazu sein nachträglich erschienenes Büchlein *Wissenschaft* (Reclam 2011), die jedoch Ende der 1990er Jahre von der Beschäftigung mit Wittgensteins Philosophie der Mathematik abgelöst wurde. Dazu erschienen ist das Buch *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins ›Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik‹* (Klostermann 2010). Kurz vor dem Erscheinen steht das mit Juliet Floyd verfasste Buch *Wittgenstein and the Real Numbers: Annotations to Hardy's ›A Course of Pure Mathematics‹*, und kurz vor der Fertigstellung ist das Buch *Wittgenstein über Zahlen und Mengen, mit einem Kommentar des Teils II von Wittgensteins ›Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik‹*.

Graham Priest studierte Philosophie und Mathematik in Cambridge und London. 1974 promovierte er an der University of London. Nach Professuren in Australien und Schottland ist er seit 2009 Professor an der City University of New York. Veröffentlichungen (Auswahl): *In Contradiction. A Study of the Transconsistent* (Oxford University Press 1986), *Towards Non-Being: The Logic and Metaphysics of Intentionality* (Oxford University Press 2005), *Doubt Truth to be a Liar* (Oxford University Press 2006).

Hilary Putnam (1926–2016) zählt zu den bedeutendsten Philosophen der letzten einhundert Jahre. Er studierte Philosophie an der University of Pennsylvania und der Harvard University. 1951 promovierte er an der University of California (UCLA) bei Hans Reichenbach. Nach längeren Aufenthalten in Princeton sowie am MIT lehrte er seit 1977 an der Harvard University. Veröffentlichungen (Auswahl): *Reason, Truth, and History* (Cambridge University Press 1981), *Representation and Reality* (MIT Press 1988), *Realism with a Human Face* (Harvard University Press 1990), *Ethics without Ontology* (Harvard University Press 2002).

Esther Ramharter ist assoziierte Professorin am Institut für Philosophie der Universität Wien. Forschungsinteressen: Philosophie der Mathematik und Logik, Religionsphilosophie, Wittgenstein. Veröffentlichungen (Auswahl): *»Die Härte des logischen Muss«. Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (zus. mit A. Weiberg, Parerga 2006); *Eine Frage der Farbe. Modalitäten des Zeichengebrauchs in der Logik* (Parerga 2011); als Herausgeberin: *Prosa oder Beweis? Wittgensteins ›berüchtigte‹ Bemerkungen zu Gödel* (Parerga 2008); *Linienwissen und Liniendenken* (hg. zus. mit S. Mainberger, de Gruyter 2017).

Bastian Reichardt studierte Philosophie und Germanistik an der Universität Bonn und ist dort seit 2012 sowie seit 2013 am Forschungszentrum Jülich als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig. Veröffentlichungen (Auswahl): *Freges Philosophie nach Frege* (hg. zus. mit A. Samans, mentis 2014), »Sprache und der soziale Ort des Selbstbewusstseins«, in: *Zeitschrift für philosophische Forschung* 71, 2017, S. 50–69.

Severin Schroeder lehrt Philosophie an den Universitäten Reading und Oxford. Hauptarbeitsgebiete: Philosophie Wittgensteins und Ästhetik. Buchveröffentlichungen: *Das Privatsprachen-Argument* (mentis 1998), *Wittgenstein: The Way Out of the Fly Bottle* (Polity Press 2006), *Wittgenstein Lesen* (Frommann-Holzboog 2009); als Herausgeber: *Wittgenstein and Contemporary Philosophy of Mind* (Palgrave Macmillan 2001), *Philosophy of Literature* (Wiley-Blackwell 2010). Er arbeitet zurzeit an einem Buch über Wittgensteins Philosophie der Mathematik.

VERZEICHNIS VON WITTGENSTEINS SCHRIFTEN, VORLESUNGEN UND IHREN SIGLEN

AL *Wittgenstein's Lectures: Cambridge 1932–1935*, hg. von A. Ambrose. Oxford: Blackwell 1979; deutsche Übersetzung von J. Schulte in: Ludwig Wittgenstein: *Vorlesungen 1930–1935*, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1984, S. 141–442.

BB *Preliminary Studies for the ›Philosophical Investigations‹ generally known as* The Blue and Brown Books, Oxford & Cambridge (MA): Blackwell 1958; deutsche Übersetzung in: Werkausgabe, Bd. 5, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

BF *Bemerkungen überv die Farben*. In: Werkausgabe, Bd. 8, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

BGM *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, hg. von G. E. M. Anscombe, R. Rhees & G. H. von Wright. In: Werkausgabe, Bd. 6, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

BGM_1 *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, hg. von G. H. von Wright, R. Rhees & G. E. M. Anscombe. Erstauflage, Oxford: Blackwell 1956.

BPP *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*, Bd. I und II. In: Werkausgabe, Bd. 7, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

BT *The Big Typescript: TS 213, German-English Scholars' Edition*, hg. und übersetzt von C. G. Luckhardt & M. A. E. Aue. Oxford & Cambridge (MA): Blackwell 2005.

BW *Ludwig Wittgenstein: Briefwechsel*, Innsbrucker elektronische Ausgabe, hg. von M. Seekircher, B. McGuinness & A. Unterkircher im Auftrag des Forschungsinstituts Brenner-Archiv. Charlottesville (VA): Intelex 2004.

LFM *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939*, hg. von C. Diamond. Hassocks: Harvester Press 1976.

LPP *Wittgenstein's Lectures on Philosophical Psychology 1946–47*, hg. von P. T. Geach. Chicago: The University of Chicago Press 1988.

LSP *Logik, Sprache, Philosophie*, von Friedrich Waismann [nach Gesprächen mit Ludwig Wittgenstein]. Stuttgart: Reclam 1976.

LWL *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930–32, from the Notes of John King & Desmond Lee*, hg. von D. Lee. Oxford & Cambridge (MA): Blackwell 1980; deutsche Übersetzung von J. Schulte in: Ludwig Wittgenstein: *Vorlesungen 1930–1935*, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1984, S. 7–139.

MS Manuskripte aus dem Nachlass Wittgensteins, nummeriert und zitiert nach: *Wittgensteins Nachlass. The Bergen Electronic Edition*, Oxford: Oxford University Press 2000.

PB *Philosophische Bemerkungen*. In: Werkausgabe, Bd. 2, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

PG *Philosophische Grammatik*. In: Werkausgabe, Bd. 4, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

PO *Philosophical Occasions, 1912–1951*, hg. von J. C. Klagge & A. Nordmann. Indianapolis: Hackett Publishing Company 1993.

PU *Philosophische Untersuchungen*, hg. von G. E. M. Anscombe, R. Rhees & G. H. von Wright. In: Werkausgabe, Bd. 1, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

PW *The Published Works of Ludwig Wittgenstein* [CD-Rom], Charlottesville (VA): Intelex 1993.

RFM *Remarks on the Foundations of Mathematics*, hg. von G. H. von Wright, R. Rhees & G. E. M. Anscombe, übersetzt von G. E. M. Anscombe. 3. Auflage, Oxford & Cambridge (MA): Blackwell 1978.

RFM_1 *Remarks on the Foundations of Mathematics*, hg. von G. H. von Wright, R. Rhees & G. E. M. Anscombe, übersetzt von G. E. M. Anscombe. 1. Auflage, Oxford & Cambridge (MA): Blackwell 1956.

TLP *Tractatus logico-philosophicus*. In: Werkausgabe, Bd. 1, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

TS Typoskripte aus dem Nachlass Wittgensteins, nummeriert und zitiert nach: *Wittgensteins Nachlass. The Bergen Electronic Edition*, Oxford: Oxford University Press 2000.

ÜG *Über Gewissheit*. In: Werkausgabe, Bd. 8, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

VGM *Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik, Cambridge 1939*, hg. von C. Diamond, übersetzt von J. Schulte. Frankfurt am Main: Suhrkamp 1978.

VW *The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle – Ludwig Wittgenstein and Friedrich Waismann*, hg. und eingeleitet von G. Baker, übersetzt von G. Baker, M. Mackert, J. Connolly & V. Politis. London & New York: Routledge 2003.

WWK *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis, Gespräche, aufgezeichnet von Friedrich Waismann*, hg. von B. F. McGuinness. In: Werkausgabe, Bd. 3, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

Z *Zettel*. In: Werkausgabe, Bd. 8, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

PERSONENREGISTER

Aristoteles 253
Armour-Garb, Brad 214, 218

Bernays, Paul 194
Bernstein, Felix 144
Blackburn, Simon 49, 52
Bromand, Joachim 17, 23, 24, 195, 224, 247, 279

Candlish, Stuart 218
Cantor, Georg 20, 21, 132, 144, 148, 163
Carroll, Lewis 111
Cavell, Stanley 46
Chihara, Charles 77, 254, 256
Conant, James 18, 51, 279

Dekker, James 139
Diamond, Cora 35, 56, 95
du Sautoy, Marcus 115
Dummett, Michael 9, 13, 35, 78, 91, 92, 102, 247

Euklid 199

Feigl, Herbert 89
Floyd, Juliet 18, 20, 21, 165, 279, 280
Fodor, Jerry 31
Forster, Michael 19, 93
Frege, Gottlob 8, 110, 261

Glock, Hans-Johann 17, 23, 227, 260, 279
Gödel, Kurt 9, 20, 22, 148, 193, 194, 247
Goldstein, Laurence 248

Heuser, Harro 145, 146
Horwich, Paul 29
Hurley, Susan 53

Kusch, Martin 11

Lovibond, Sabina 53

McDowell, John 53, 89
Molinos, Michaelis de 64
Moyal-Sharrock, Danièle 11
Mühlhölzer, Felix 17, 20–22, 119, 154, 165, 190, 280

Noether, Emmy 144

Pólya, György 143
Priest, Graham 18, 20, 22, 84, 195, 257, 258, 280
Putnam, Hilary 18, 29, 120, 280

Ramharter, Esther 17, 20, 21, 151, 280
Reichardt, Bastian 18, 19, 51, 76, 77, 281
Reichenbach, Hans 280
Russell, Bertrand 8, 79

Schroeder, Severin 17–19, 99, 281
Shanker, Stuart 166
Sieg, Wilfried 165
Sokrates 228
Steiner, Mark 108, 111
Strawson, Peter F. 273

Tarski, Alfred 11, 253

Voltaire 113

Waismann, Friedrich 108, 283, 284
Watson, Alister 166, 188
Weiss, Bernhard 195, 218
Weyl, Hermann 143
Wright, Crispin 247

Zermelo, Ernst 163